VISOKA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA ZA
INFORMACIONE I KOMUNIKACIONE TEHNOLOGIJE
BEOGRAD

Zorica Malović

MATEMATIKA 1

(Zbirka zadataka)

Beograd, 2008.

Recenzenti:

Dr Slavik Jablan, profesor Visoke škole strukovnih studija za informacione i komunikacione tehnologije u Beogradu

Mr Srđan Ognjanović, profesor Matematičke gimnazije u Beogradu

Izdavač:
Visoka škole strukovnih studija za informacione i komunikacione tehnologije Beogradu
11000 Beograd, Zdravka Čelara 16

Štampa :
Beograf d.o.o., Braće Mihajlović Tripić br.1,
Batajnica, Beograd

Izdanje:
Treće

Tiraž: 500 primeraka

SADRŽAJ:

PREDGOVOR

Zbirka je namenjena studentima VIŠE ŠKOLE ZA INFORMACIONE I KOMUNIKACIONE TEHNOLOGIJE BEOGRAD.

MATEMATIKA 1 je obavezan predmet na svim smerovima.

Tipovi zadataka koji su odabrani rade se na časovima vežbi.

Većina navedenih primera je urađena ili su data detaljna uputstva za rešavanje. Nadam se da će ova zbirka, pored predavanja i vežbi, pomoći studenatima da savladaju predviđeni plan i program.

Autor

Beograd, 2004.

Drugo, ispravljeno izdanje, štampano je 2007. godine.

Autor

Treće, ispravljeno izdanje, štampano je 2008. godine.

Autor

I MATEMATIČKA LOGIKA

Tablice logičkih operacija :

Negacija

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Konjunkcija

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Disjunkcija

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Implikacija

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Ekvivalencija

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Ekskluzivna disjunkcija

p	q	$p \veebar q$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

1. Sastaviti istinitosne tablice za sledeće formule:

1° $(p \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow p$ **2°** $\neg(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

3° $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ **4°** $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$

5° $(\neg p \vee q) \veebar (p \wedge \neg q)$ **6°** $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg r$

7° $(\neg r \vee q) \veebar (p \wedge q)$ **8°** $(\neg p \vee r) \veebar (r \wedge \neg q)$

9° $((\neg p \vee (q \Rightarrow \neg r)) \vee q) \veebar (p \wedge \neg q)$

2. Ispitati da li su sledeće formule tautologije:

1° $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
2° $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
3° $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p\ ))$
4° $(\ p \veebar q\ ) \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$
5° $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
6° $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

3. Svođenjem na protivrečnost, dokazati da su sledeće formule tautologije:

1° $(\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow p\ ) \Rightarrow p$
2° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$
3° $(\neg p \vee q) \Rightarrow (\ p \Rightarrow q)$
4° $\Rightarrow q) \Rightarrow \quad \Rightarrow (\ (r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p\ ))$

4. Korišćenjem tautologija, date formule prevesti u ekvivalentne formule u kojima će biti samo operacije $\neg, \wedge, \vee$.

1° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$; 2° $(p \Leftrightarrow q) \vee \neg q$; 3° $p \veebar q$;
4° $\neg p \veebar q$; 5° $p \veebar \neg q$ 6° $p \veebar (\ \neg q \Rightarrow r\ )$

REŠENJA :

1.

1° $(p \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow p$

p	$\neg p$	$(p \Rightarrow \neg p)$	$(p \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow p$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$

2° $\neg(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$

5° $(\neg p \vee q) \veebar (p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg p \vee q) \veebar (p \wedge \neg q)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

6° $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg r$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg r$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

7° $(\neg r \vee q) \veebar (p \wedge q)$

p	q	r	$\neg r$	$\neg r \vee q$	$p \wedge q$	$(\neg r \vee q) \veebar (p \wedge q)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

2.

1° $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

Formula jeste tautologija.

2° $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Formula jeste tautologija.

3.

1° $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

Pretpostavimo da je formula netačna. Proizilazi da je $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) = \top$ i istovremeno $\tau(p) = \bot$.

$$\tau((\bot \Rightarrow q) \Rightarrow \bot)) = \top$$

Pošto je $\tau(\bot \Rightarrow q) = \top$, zbog svojstava implikacije, sledi da je $\tau(\top \Rightarrow \bot)) = \bot$, a to je suprotno pretpostavci.

Svođenjem na protivrečnost, dokazano je da je formula tautologija.

4° $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

Označimo: $A = ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$ i $B = ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

Pretpostavimo da je formula netačna Proizilazi da je $\tau(A) = \top$ i istovremeno $\tau(B) = \bot$. Pošto je $\tau(B) = \bot$ mora biti $\tau(r \Rightarrow p) = \top$ i istovremeno $\tau(q \Rightarrow p) = \bot$

Sledi da je $\tau(p) = \bot$, $\tau(q) = \top$ i $\tau(r) = \bot$ .Kada se ove vradnosti promenljivih p,q,r uvrste u A dobija se $\tau(A) = \bot$ a to je suprotno pretpostavci.

Svođenjem na protivrečnost, dokazano je da je formula tautologija.

4.

1° Korišćenjem tautologije $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$, data formula se prevodi u ekvivalentnu formulu $(\neg p \vee q) \Rightarrow \neg p$ a zatim, još jednom primenjujući istu tautologiju, u $\neg(\neg p \vee q) \vee \neg p$.

2° $(p \Leftrightarrow q) \vee \neg q$

Zadatak se rešava korišćenjem tautologija

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \text{ i } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

3° $p \veebar q$

Zadatak se rešava korišćenjem tautologija $(p \veebar q) \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$;

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \quad \text{i}$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

II SKUPOVI

1. Dati su skupovi: A= $\{1, 3, 5\}$ B $=\{1, 2, 3\}$ C= $\{2, 3, 6\}$. Odrediti: $A\cup B$; $A\cap C$; $A\Delta C$; P(A); A X B ; B X A ; AXA

2. Dat je skup A= $\{a, b\}$. Odrediti A X A ; P(A); P(A X A); card(A); card P(A); card P(A X A).

3. Dati su skupovi: A= $\varnothing$; B= $\{O, \Delta\}$; C= $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Odrediti partitivne skupove P(A) , P(B) , P(C) i kardinalne brojeve svih skupova.

4. Neka je A= $\{1, 2, 3, 4\}$ .Odrediti A X A , card(A) i card P(A X A).
Na skupu A definisane su sledeće relacije :

$\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$\rho_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$\rho_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

$\rho_4 = \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

$\rho_5 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

$\rho_6 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4)\}$

$\rho_7 = \{(1,1),(1,2),(2,1)(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

$\rho_8 = \{(1,1),(1,2),(2,1)(2,2),(3,3),(3,4),(4,3)\}$

$\rho_9 = \varnothing$ (prazna relacija)

$\rho_{10} =$ A X A (puna relacija)

Za svaku relaciju nacrtati graf i utvrditi osobine (refleksivnost ,simetričnost, antisimetričnost , tranzitivnost) .

5. Dat je skup A= { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } i relacija ρ .
x ρ y $\Leftrightarrow$ brojevi x i y imaju isti ostatak prilikom deljenja sa 3
($x \equiv y (\mathrm{mod}\ 3)$)
Nacrtati graf relacije , utvrditi osobine i odrediti količnički skup.

6. Dat je skup A= { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } i relacije :
a) x ρ_1 y $\Leftrightarrow$ x $\leq$ y
b) x ρ_2 y $\Leftrightarrow$ y je deljivo sa x   Nacrtati grafove i utvrditi osobine relacija.

7. Dat je skup A= {-1 ,-2, -3, 1, 2, 3 } i relacija ρ .
x ρ y $\Leftrightarrow |x|=|y|$ Nacrtati graf i utvrditi osobine relacije.

8. Dat je skup A= { 1, 2, 3,4,5 } i relacija ρ .
x ρ y $\Leftrightarrow x+1 \leq y$ Nacrtati tablicu, graf i utvrditi osobine relacije.

9. Dat je skup A= { 0,1, 2, 3,4,5 } i relacija ρ .
x ρ y $\Leftrightarrow x+y=5$ Nacrtati tablicu, graf i utvrditi osobine relacije.

REŠENJA :

1.

$A\cup B=\{1,2,3,5\}$;

$A\cap C=\{3\}$;

$A\Delta C=\{1,2,5,6\}$;

$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{1,5\}\{3,5\},\{1,3,5\}\}$;

$AXB=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$

$BXA=\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5)\}$

$AXA=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

2.

Dat je skup $A=\{a,b\}$.

$A\ X\ A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$;

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$;

$P(A\ X\ A)=$

$$\left\{\begin{array}{l}\varnothing,\{(a,a)\},\{(a,b)\},\{(b,a)\},\{(b,b)\},\{(a,a),(a,b)\},\{(a,a),(b,a)\},\{(a,a),(b,b)\},\\ \{(a,b),(b,a)\},\{(a,b),(b,b)\},\{(b,a),(b,b)\},\{(a,a),(a,b),(b,a)\},\{(a,a),(a,b),(b,b)\},\\ \{(a,a),(b,a),(b,b)\},\{(a,b),(b,a),(b,b)\},\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\},\end{array}\right\}$$

card(A)= 2;

card P(A)= 4;

card P(A X A)= 16

3.

$A=\varnothing$; $B=\{O,\Delta\}$; $C=\{\ \ ,\{\varnothing$

$P(A)=\{\varnothing\}$, card(A)= 0, card P(A)=1,

$P(B)=\{\varnothing,\{O\},\{\Delta\},\{O,\Delta\}\}$, card(B)= 2 , card P(B)= 4,

$P(C)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ card(C)= 2, card P(C)= 4

4.

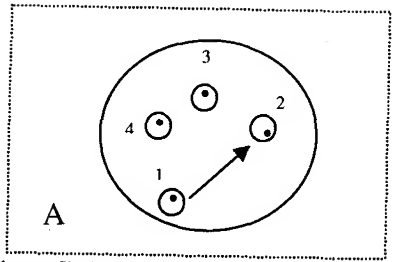
$A=\{1,2,3,4\}$

$$AXA=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\end{array}\right\}$$

card(A)=4,

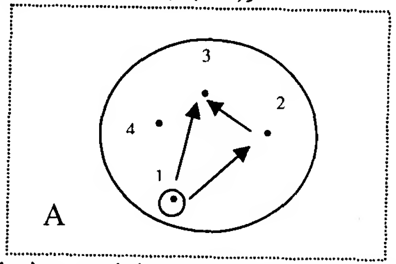
card P(A X A) = 16.

$\rho_1=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$



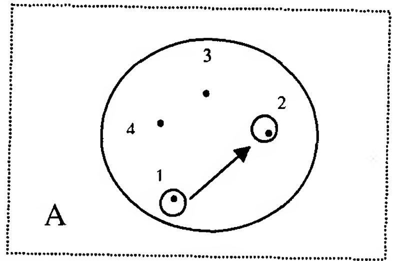
Relacija je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.
(relacija poretka)

$\rho_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3)\}$



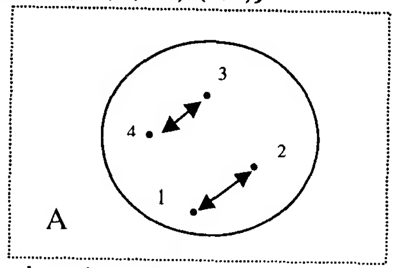
Relacija je antisimetrična i tranzitivna.

$\rho_3=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$



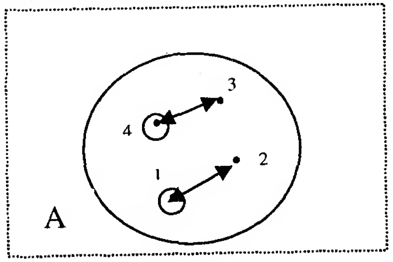
Relacija je antisimetrična i tranzitivna.

$\rho_4=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$



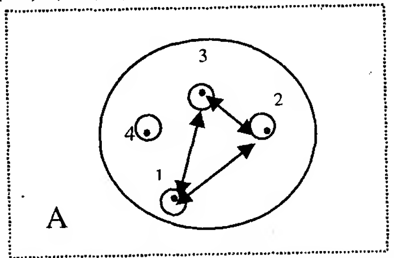
Relacija je simetrična .

$\rho_5 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(4,4)\}$



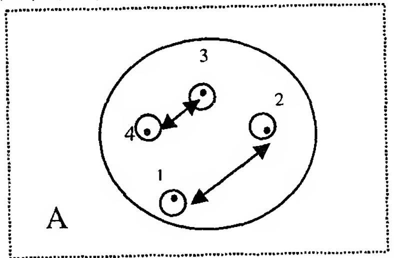
Relacija je simetrična.

$\rho_6 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4)\}$



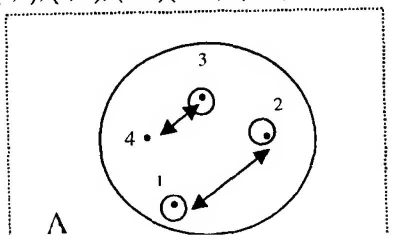
Relacija je refleksivna, simetrična i tranzitivna.
(relacija ekvivalencije)

$\rho_7 = \{(1,1),(1,2),(2,1)(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$



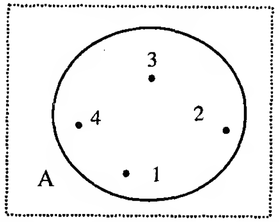
Relacija je refleksivna, simetrična i tranzitivna
(relacija ekvivalencije).

$\rho_8 = \{(1,1),(1,2),(2,1)(2,2),(3,3),(3,4),(4,3)\}$



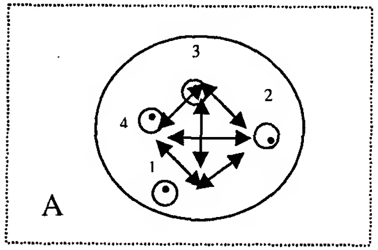
Relacija je simetrična .
Ova relacija, ako bi se uporedila sa ρ_7, nije refleksivna (ne sadrži $(4,4)$) i nije tranzitivna (sadrži $(3,4),(4,3)$, ali ne sadrži $(4,4)$).

$\rho_9 = \varnothing$ (prazna relacija)



Relacija je simetrična, antisimetrična i tranzitivna.

$\rho_{10} = A \times A$ (puna relacija)



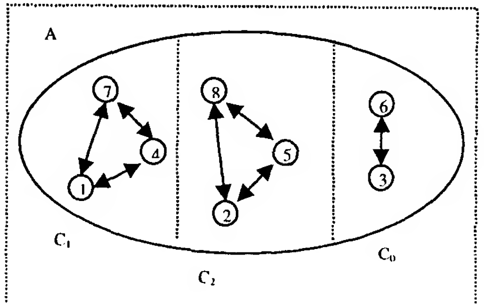
Relacija je refleksivna, simetrična i tranzitivna
(relacija ekvivalencije).

---

5. Dat je skup A= { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } i relacija ρ .
x ρ y ⇔ brojevi x i y imaju isti ostatak prilikom deljenja sa 3

$(x \equiv y(\text{mod }3))$

Relacija je refleksivna, simetrična i tranzitivna
(relacija ekvivalencije).
Postoje tri klase ekvivalencije C_0, C_1, C_2.
$C_0=\{3,6\}$, $C_1=\{1,4,7\}$, $C_2=\{2,5,8\}$
Količnički skup je $C/\rho = \{C_0, C_1, C_2,\}$



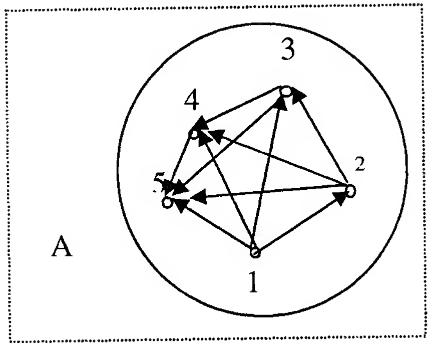
8. Dat je skup $A=\{1,2,3,4,5\}$ i relacija ρ.

$x\,\rho\,y \Leftrightarrow x+1\le y$ Nacrtati tablicu, graf i utvrditi osobine relacije.

Tablica relacije:

ρ	1	2	3	4	5
1	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
2	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
3	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤
4	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤
5	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

Graf relacije:



Relacija je antisimetrična i tranzitivna.

III KOMPLEKSNI BROJEVI

1. Dati su kompleksni brojevi : $z_1=2-i$; $z_2=3+i$.

Odrediti Re W i Im W ako je :

1° $W=z_1^2-\overline{z_2}-1$ 2° $W=3z_2^2-\overline{z_1}+2$

3° $W=\dfrac{z_1}{z_2}-\overline{z_1 z_2}$ 4° $W=3\dfrac{z_1}{z_2}-\overline{z_1}+2i$

5° $W=\dfrac{z_1+5+i}{z_2}-2i-\overline{z_1}$

2. Odrediti ReW i ImW ako je :

1° $W=\dfrac{(1+i)^{20}-(1-i)^{19}}{(1+i)^{18}}$

2° $W=\dfrac{(1-i)^{54}+(1+i)^{53}}{(1+i)^{52}}$

3° $W=i^{23}-\dfrac{i^{54}}{i^{21}+i}-\dfrac{i^{45}}{i^{32}+i^{28}}$

4° $W=i^{213}+\dfrac{i+2}{i-1}$

5° $W=i^{153}+\dfrac{i^{25}+2}{i^{45}-i^{120}}$

3. Odrediti kompleksni broj $z=x+iy$ ako je :

1° $z+(1+3i)^2=2-i$ 2° $\overline{z}-2\left(z+i^{35}\right)=\dfrac{3+2i}{1-i}$

3° $z+(1+i)^2=2-i\overline{z}$ 4° $\overline{z}-2\left(z-i^{75}\right)=\dfrac{2}{i}$

4. Odrediti trigonometrijski i eksponencijalni oblik sledećih kompleksnih brojeva :

$z_1=3$; $z_2=2+2i$; $z_3=-\sqrt{3}+i$;

$z_4=-\sqrt{3}-i$; $z_5=-2-2\sqrt{3}i$; $z_6=3-3\sqrt{3}i$;

$z_7=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_8=-2i$; $z_9=-2$; $z_{10}=i$

5. Odrediti ReW i ImW ako je :

1° $W=\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{12}}{(1+i)^{18}}$ 2° $W=\dfrac{(1-i)^{20}}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{6}}$

3° $W=\dfrac{i^{15}\left(-2+i2\sqrt{3}\right)^{12}}{\left(2+i2\sqrt{3}\right)^{6}}$ 4° $W=\dfrac{(1+i)^{16}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{6}}$.

6. Odrediti ReW i ImW ako je :

1° $W=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{2}}+1}{3-e^{i\frac{3\pi}{2}}}$ 2° $W=\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{3}}}{-1+i\sqrt{3}}$ 3° $W=\dfrac{5e^{i\pi}-i^{3}}{1+e^{i\frac{\pi}{2}}}$

4° $W=\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{2}}+2}{1+e^{i\frac{3\pi}{2}}}$ 5° $W=\dfrac{e^{i\frac{3\pi}{2}}+1}{1-e^{i\frac{3\pi}{2}}}$ 6° $W=\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{3}}}{1+i}$

7. Rešiti jednačine u skupu kompleksnih brojeva :

1° $z^{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=0$ 2° $z^{3}+1=0$ 3° $z^{4}-i=0$

4° $z^{6}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=0$ 5° $z^{3}+\sqrt{3}-i=0$ 6° $z^{4}+1=0$

REŠENJA :

1. 1° $z_1=2-i$; $z_2=3+i$; $\overline{z_1}=2+i$; $\overline{z_2}=3-i$

$W=z_1^2-\overline{z_2}-1=(2-i)^2-(3-i)-1=4-4i+i^2-3+i-1=-1-3i$

Odgovor: -- Re W = −1 ; Im W= -3

2°

$W=3z_2^2-\overline{z_1}+2=3(3+i)^2-(2+i)+2=3(8+6i)-(2+i)+2=24+17i$

Odgovor: -- Re W =24 ; Im W=17

3°

$W=\dfrac{z_1}{z_2}-\overline{z_1z_2}=\dfrac{2-i}{3+i}-\overline{(2-i)(3+i)}=\dfrac{2-i}{3+i}\cdot\dfrac{3-i}{3-i}-\overline{(7-i)}=\dfrac{5-5i}{10}-(7+i)$

$=\dfrac{1-i}{2}-\dfrac{14+2i}{2}=-\dfrac{13}{2}-\dfrac{3}{2}i$

Odgovor:------------------------------- Re W $=-\dfrac{13}{2}$; Im W$=-\dfrac{3}{2}$

4°

$W=3\dfrac{z_1}{z_2}-\overline{z_1}+2i=3\dfrac{1-i}{2}-(2+i)+2i=3\dfrac{1-i}{2}+\dfrac{-4+2i}{2}=$

$=\dfrac{3-3i}{2}+\dfrac{-4+2i}{2}i=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{-1}{2}i$

Odgovor:------------------------------- Re W $=-\dfrac{1}{2}$; Im W$=-\dfrac{1}{2}$

5°

$W=\dfrac{z_1+5+i}{z_2}-2i-\overline{z_1}=\dfrac{2-i+5+i}{3+i}-2i-\overline{(2-i)}=\dfrac{7}{3+i}\cdot\dfrac{3-i}{3-i}-2i-(2+i)$

$=\dfrac{21-7i}{10}-2-i=\dfrac{21-7i}{10}+\dfrac{-20-10i}{10}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{-17}{10}i$

Odgovor: ---------------------------- Re W $=\dfrac{1}{10}$; Im W=- $\dfrac{-17}{10}$

2. Jedan od načina da se uradi ovaj zadatak je da se iskoriste činjenice da je:

$(1+i)^2=2i$; $(1-i)^2=-2i$; $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=1$;

1°

$$W=\frac{(1+i)^{20}-(1-i)^{19}}{(1+i)^{18}}=\frac{(2i)^{10}-(-2i)^{9}(1-i)}{(2i)^{9}}=\frac{(2i)^{10}+(2i)^{9}(1-i)}{(2i)^{9}}=$$

$$=\frac{(2i)^{9}(2i+1-i)}{(2i)^{9}}=1+i$$

Odgovor: -- Re W =1 ; Im W= 1

2°

$$W=\frac{(1-i)^{54}+(1+i)^{53}}{(1+i)^{52}}=\frac{(-2i)^{27}+(2i)^{26}(1+i)}{(2i)^{26}}=\frac{-(2i)^{27}+(2i)^{26}(1+i)}{(2i)^{26}}=$$

$$=\frac{(2i)^{26}(-2i+1+i)}{(2i)^{26}}=1-i$$

Odgovor:-------------------------------------- Re W =1 ; Im W= -1

3°

$$W=i^{23}-\frac{i^{54}}{i^{21}+i}-\frac{i^{45}}{i^{32}+i^{28}}=i^{20+3}-\frac{i^{52+2}}{i^{20+1}+i}-\frac{i^{44+1}}{i^{32}+i^{28}}=i^{3}-\frac{i^{2}}{i^{1}+i}-\frac{i}{1+1}=$$

$$=-i+\frac{1}{2i}-\frac{i}{2}=-i+\frac{1}{2i}\frac{i}{i}-\frac{i}{2}=-i-\frac{i}{2}-\frac{i}{2}=-2i$$

Odgovor: ------------------------------------- Re W =0 ; Im W=−2

4° $$W=i^{213}+\frac{i+2}{i-1}=i+\frac{1+3i}{-2}=\frac{1+i}{-2}=\frac{1}{-2}+\frac{1}{-2}i$$

Odgovor:------------------------------ Re W $=\frac{1}{-2}$; Im W= $\frac{1}{-2}$

5° $$W=i^{153}+\frac{i^{25}+2}{i^{45}-i^{120}}$$

Odgovor:----------------------------- Re W $=\frac{1}{-2}$; Im W= $\frac{1}{-2}$

3.

1°

$$z+(1+3i)^2=2-i \quad ; \qquad z=-(1+3i)^2+2-i;$$

$$z=-(1+6i+9i^2)+2-i \quad ; \quad z=-(1+6i-9)+2-i \quad ;$$

Odgovor:--- $z=10-7i$

2°

$$\bar{z}-2(z+i^{35})=\frac{3+2i}{1-i}; \quad z=x+iy; \quad \bar{z}=x-iy; \quad i^{35}=i^{3}=-i$$

$$x-iy-2(x+iy-i)=\frac{3+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} \quad ; \quad x-iy-2x-2yi+2i=\frac{3+5i+i^2}{2}$$

$$-x-3yi+2i=1+\frac{5}{2}i \quad ; \quad -x-3yi=1+\frac{5}{2}i-2i \quad ; \quad -x-3yi=1+\frac{1}{2}i$$

Korišćenjem činjenice da su dva kompleksna broja jednaka ako su im jednaki realni i imaginarni delovi, dobija se sistem dve jednačine sa dve nepoznate:

$-x=1$; $-3y=\frac{1}{2}$ koji ima rešenje $(x,y)=\left(-1,-\frac{1}{6}\right)$

Odgovor:-- $z=-1-\frac{1}{6}i$

3° $z+(1+i)^2=2-i\bar{z}$

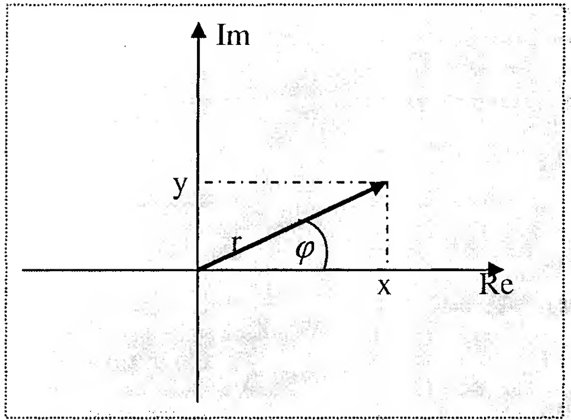
Odgovor:--- Takav broj ne postoji.

4° $\bar{z}-2(z-i^{75})=\frac{2}{i}$

Odgovor:--- $z=0$

4.

Kompleksni broj, čiji je algebarski oblik $z = x + iy$, u kompleksnoj ravni se predstavlja vektorom položaja tačke (x, y).



Trigonometrijski oblik glasi $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Eksponencijalni oblik glasi $z = re^{i\varphi}$

r predstavlja modul kompleksnog broja $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Geometrijski, to je dužina vektora kojim se predstavlja kompleksni broj.

φ je argument kompleksnog broja. Geometrijski, to je ugao koji vektor zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose. φ je ugao iz intervala $[0,2\pi)$. Jedan od načina da se on odredi je korišćenje veze

$tg\ \varphi = \dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \dfrac{y}{x}$. S obzirom na to da postoje dve vrednosti φ iz intervala $[0,2\pi)$ takve da važi $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, **obavezno je utvrditi u kom kvadrantu se nalazi vektor** kojim se predstavlja kompleksni broj. Korišćenjem ovog pomoćnog uslova jednoznačno se određuje φ.

$z_1 = 3$; $x = 3$ $y = 0$; $r = 3$ $\varphi = 0$; ;

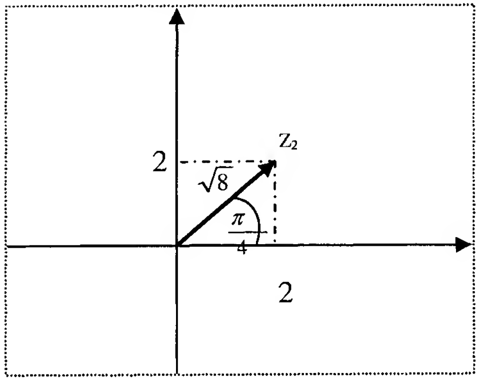
Odgovor:------------------------------------ $z_1 = 3(\cos 0 + i\sin 0) = 3e^{i0}$

$z_2 = 2 + 2i$; $x = 2$ $y = 2$; $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$;

$tg\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{2} = 1$ $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

Postoje dva ugla iz intervala $[0,2\pi)$ čiji je tangens jednak 1.

To su $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$ i $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{4}$. Uzima se da je $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ jer je vektor kojim se predstavlja $z_2 = 2 + 2i$ u prvom kvadrantu.($x > 0; y > 0$).



Odgovor: ------------------------- $z_2 = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_3 = -\sqrt{3} + i$; $x = -\sqrt{3}$ $y = 1$; $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$;

$tg\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$; $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$;

Postoje dva ugla iz intervala $[0,2\pi)$ čiji je tangens jednak $\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$, a to su $\varphi_1 = \dfrac{5\pi}{6}$ i $\varphi_2 = \dfrac{11\pi}{6}$. Uzima se da je $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$ jer je vektor kojim se predstavlja $z_3 = -\sqrt{3} + i$ u drugom kvadrantu.($x < 0; y > 0$).

Odgovor:--------------------------- $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_4 = -\sqrt{3} - i$; $x = -\sqrt{3}$ $y = -1$; $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$;

$tg\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\varphi = \dfrac{7\pi}{6}$;

Postoje dva ugla iz intervala $[0,2\pi)$ čiji je tangens jednak $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

To su $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ i $\varphi_2 = \dfrac{7\pi}{6}$.

Uzima se da je $\varphi=\dfrac{7\pi}{6}$ jer je vektor kojim se predstavlja

$z_4=-\sqrt{3}-i$ u trećem kvadrantu.($x<0; y<0$).

Odgovor: -------------------------- $z_4=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$;

$z_5=-2-2\sqrt{3}i;\quad x=-2\quad y=-2\sqrt{3}i;\quad r=\sqrt{(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16}=4;$

$$tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}\quad \varphi=\frac{4\pi}{3};$$

Postoje dva ugla iz intervala $[0,2\pi)$ čiji je tangens jednak $\sqrt{3}$;

$\varphi_1=\dfrac{\pi}{3}$ i $\varphi_2=\dfrac{4\pi}{3}$.

Uzima se da je $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}$ jer je vektor kojim se predstavlja

$z_5=-2-2\sqrt{3}i$ u trećem kvadrantu.($x<0; y>0$).

Odgovor:---------------------------- $z_5=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_6=3-3\sqrt{3}i;\quad x=3\quad y=-3\sqrt{3}i;\quad r=\sqrt{3^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36}=6;$

$$tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{-3\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}\quad \varphi=\frac{5\pi}{3};$$

Postoje dva ugla iz intervala $[0,2\pi)$ čiji je tangens jednak - $\sqrt{3}$.

To su $\varphi_1=\dfrac{2\pi}{3}$ i $\varphi_2=\dfrac{5\pi}{3}$.Uzima se da je $\varphi=\dfrac{5\pi}{3}$ jer je vektor kojim se predstavlja $z_6=3-3\sqrt{3}i$ u četvrtom kvadrantu.

($x>0; y<0$).

Odgovor:------------------------------ $z_6=6\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=6e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$z_7=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\quad x=-\dfrac{1}{2}\quad y=-3\sqrt{3}i;\quad r=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1}=1;$

$$tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}\quad \varphi=\frac{2\pi}{3};$$

Postoje dva ugla iz intervala $[0,2\pi)$ čiji je tangens jednak - $\sqrt{3}$ a to su $\varphi_1=\dfrac{2\pi}{3}$, $\varphi_2=\dfrac{5\pi}{3}$.

Uzima se da je $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ jer je vektor kojim se predstavlja

$z_7=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ u drugom kvadrantu.($x<0; y>0$).

Odgovor:------------------------------ $z_7=1\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_8=-2i$;

Odgovor:---------------------------- $z_8=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$z_9=-2$

Odgovor:------------------------------------ $z_9=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi}$

$z_{10}=i$

Odgovor:-------------------------------- $z_{10}=1\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=1e^{i\frac{\pi}{2}}$

5.

U narednim primerima koriste se formule za operacije sa kompleksnim brojevima u trigonometrijskom, odnosno, u eksponencijalnom obliku.

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^ne^{in\varphi}$$

1°

$$W=\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1+i)^{18}}=\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{18}}=\frac{2^{12}e^{i\frac{\pi}{6}\cdot 12}}{\sqrt{2}^{18}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 18}}=\frac{2^{12}e^{i2\pi}}{2^{9}e^{i\frac{9\pi}{2}}}=8e^{i\left(\frac{-5\pi}{2}\right)}=$$

$$=8e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}=8\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)=8(0+i(-1))=-8i$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W =0 ; Im W= -8

2°

$$W=\frac{(1-i)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^{20}}{\left(2e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^{6}}=\frac{\sqrt{2}^{20}e^{i\frac{7\pi}{4}\cdot 20}}{2^{6}e^{i\frac{5\pi}{3}\cdot 6}}=\frac{2^{10}e^{i35\pi}}{2^{6}e^{i10\pi}}=2^{4}e^{i25\pi}=$$

$$=16e^{i\pi}=16(\cos\pi+i\sin\pi)=16(-1+i0)=-16$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W =-16 ; Im W= 0

3°

$$W=\frac{i^{15}\left(-2+i2\sqrt{3}\right)^{12}}{\left(2+i2\sqrt{3}\right)^{6}}=\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{15}\left(4e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{12}}{\left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6}}=\frac{4^{12}e^{i\frac{15\pi}{2}}e^{i8\pi}}{4^{6}e^{i2\pi}}=4^{6}e^{i\frac{27\pi}{2}}=$$

$$=4^{6}e^{i\frac{3\pi}{2}}=4^{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=4096(0+i(-1))=-4096i$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W =0 ; Im W= -4096

4° $$W=\frac{(1+i)^{16}}{(1+\sqrt{3}i)^{6}}$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W =4 ; Im W= 0

6. 1°

$$W=\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}+1}{3-e^{i\frac{3\pi}{2}}}=\frac{2i+1}{3-(-i)}=\frac{2i+1}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{6i-2i^{2}+3-i}{9-i^{2}}=\frac{5+5i}{10}$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W $=\frac{1}{2}$; Im W= $\frac{1}{2}$

2°

$$W=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{3}}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=-1$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W =-1 ; Im W=0

3° $$W=\frac{5e^{i\pi}-i^{3}}{1+e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{-5+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{-4+6i}{2}=-2+3i$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W =-2 ; Im W=3

4° $$W=\frac{4e^{i\frac{\pi}{2}}+2}{1+e^{i\frac{3\pi}{2}}}$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W =-1 ; Im W=3

5° $$W=\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}+1}{1-e^{i\frac{3\pi}{2}}}$$

Odgovor:--------------------------------------- Re W =0 ; Im W=-1

6° $$W=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{3}}}{1+i}=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$$

Odgovor:------------------------- Re W = $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; Im W= $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

7. Rešavanje narednih jednačina, u skupu kompleksnih brojeva, svodi se na nalaženje
n-tih korena kompleksnog broja.

$$\sqrt[n]{\omega}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$ trigonometrijski oblik

$$\sqrt[n]{\omega}=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$ eksponencijalni oblik

n- red korena ; $k=0,1,\cdots,n-1$

ω -kompleksni broj čiji se koren traži ;

ρ - modul kompleksnog broja ω

θ - argument kompleksnog broja ω

$\sqrt[n]{\omega}$ ima **n** različitih vrednosti $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$ koje se dobijaju iz navedene formule, biranjem različitih vrednosti za k.
Geometrijski, krajevi vektora kojima se predstavljaju kompleksni brojevi $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$ predstavljaju temena pravilnog n-tougla.

1°

$$z^3+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=0 \quad ; \quad z^3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad z=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

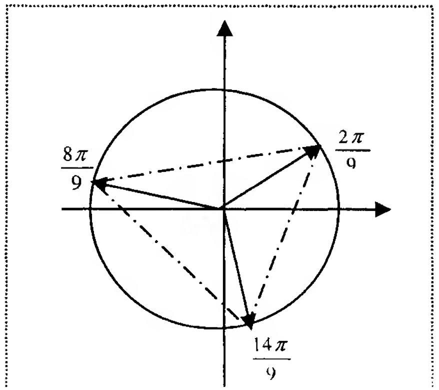
$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad \rho=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1 \quad ; \quad \theta=\frac{2\pi}{3}$$

n=3 ; $k=0,1,2$

k=0 ; $\omega_0=\sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot0\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{9}}$

k=1 ; $\omega_1=\sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot1\pi}{3}}=e^{i\frac{8\pi}{9}}$

k=2 ; $\omega_2=\sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot1\pi}{3}}=e^{i\frac{14\pi}{9}}$



Odgovor:--

Jednačina ima tri rešenja $\omega_0=e^{i\frac{2\pi}{9}},\omega_1=e^{i\frac{8\pi}{9}},\omega_2=e^{i\frac{14\pi}{9}}$.

2° $z^3+1=0$

Odgovor:--

Jednačina ima tri rešenja $\omega_0=e^{i\frac{\pi}{3}},\omega_1=e^{i\pi},\omega_2=e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

3° $z^4-i=0$

Odgovor:--

Postoje četiri rešenja $\omega_0=e^{i\frac{\pi}{8}},\omega_1=e^{i\frac{5\pi}{8}},\omega_2=e^{i\frac{9\pi}{8}},\omega_3=e^{i\frac{14\pi}{8}}$.

4° $z^6+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$

Odgovor:-------------------------------------- Jednačina ima šest rešenja

$\omega_0=e^{i\frac{\pi}{9}},\omega_1=e^{i\frac{4\pi}{9}},\omega_2=e^{i\frac{7\pi}{9}}$,

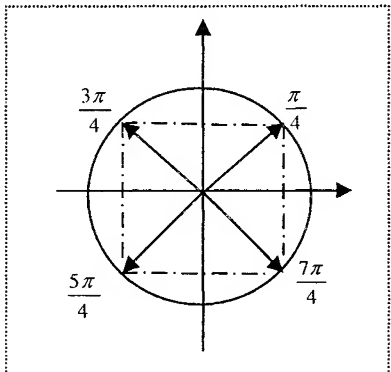
$\omega_3=e^{i\frac{10\pi}{9}},\omega_4=e^{i\frac{13\pi}{9}},\omega_5=e^{i\frac{16\pi}{9}}$.

5° $z^3+\sqrt{3}-i=0$

Odgovor:-----------------------Jednačina ima tri rešenja

$\omega_0=\sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{18}},\omega_1=\sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{17\pi}{18}},\omega_2=\sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{29\pi}{18}}$.

6° $z^4+1=0$



Odgovor:------------ Jednačina ima četiri rešenja

$\omega_0=e^{i\frac{\pi}{4}},\omega_1=e^{i\frac{3\pi}{4}},\omega_2=e^{i\frac{5\pi}{4}},\omega_3=e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

IV DETERMINANTE I MATRICE

1. Izračunati vrednosti sledećih determinanti:

1° $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$ **2°** $\begin{vmatrix} a+1 & a-3 \\ 6a & 1 \end{vmatrix}$

3° $\begin{vmatrix} 1-i & 2-3i \\ 6 & 2+i \end{vmatrix}$ **4°** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

5° $\begin{vmatrix} i & i^2 & i^3 \\ i^4 & i^5 & i^7 \\ i^8 & i^9 & i^{10} \end{vmatrix}$ **6°** $\begin{vmatrix} 3 & i^2 & i^3 \\ 1 & i^5 & 1 \\ 0 & i^9 & 1 \end{vmatrix}$

7° $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **8°** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

2. Odrediti kompleksni broj $z = x + iy$ ako je :

1° $\begin{vmatrix} z & 0 & i \\ 0 & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **2°** $\begin{vmatrix} 1 & z & 0 \\ i & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

3. Izračunati :

1° 2A + 5B = **2°** 3A - E + A B =

3° AB - BA = **4°** 3A + 5E + BA =

5° $(A \cdot B) \cdot (B \cdot A) =$

ako je a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

E je odgovarajuća jedinična matrica .

4. Izračunati proizvode :

1° $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} =$ **2°** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot$

3° $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} =$ **4°** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. Odrediti inverzne matrice za matrice :

1° $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **2°** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **3°** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4° $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **5°** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6° $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **7°** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Odrediti vrednost realnog parametra t, tako da matrica

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & t\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & t & 2\end{bmatrix}$$ ima inverznu matricu a zatim je, za neku od dozvoljenih vrednosti, odrediti .

7. Rešiti matrične jednačine :

1° 3A + X = B + E **2°** A + 2 E – X = 3 B
3° A X = B **4°** XA = B
5° (A +E) X = B + E **6°** X (A -E) = B - E
ako je :

a) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

E je odgovarajuća jedinična matrica .

REŠENJA :

1.

1° $\begin{vmatrix}1 & -3\\ 6 & 1\end{vmatrix}=19$

2°
$$\begin{vmatrix}a+1 & a-3\\ 6a & 1\end{vmatrix}=a+1-6a(a-3)=a+1-(6a^2-18a)=-6a^2+19a+1$$

3° $\begin{vmatrix}1-i & 2-3i\\ 6 & 2+i\end{vmatrix}=(1-i)(2-i)-6(2-3i)=-9+17i$

4° $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=0$ **5°** $\begin{vmatrix}i & i^2 & i^3\\ i^4 & i^5 & i^7\\ i^8 & i^9 & i^{10}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}i & -1 & -i\\ 1 & i & -i\\ 1 & i & -1\end{vmatrix}=0$

6° $\begin{vmatrix}3 & i^2 & i^3\\ 1 & i^5 & 1\\ 0 & i^9 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & -i\\ 1 & i & 1\\ 0 & i & 1\end{vmatrix}=2$ **7°** $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1$

8° $\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=2$

2.

1° $\begin{vmatrix}z & 0 & i\\ 0 & i & 1\\ i & 1 & 1\end{vmatrix}=0$;Vrednost determinante je

$$z\begin{vmatrix}i & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+i\begin{vmatrix}0 & i\\ i & 1\end{vmatrix}=z(i-1)+i(-i^2)=z(i-1)+i\ .$$

Jednačina postaje

$$z(i-1)+i=0\quad ;\quad z(i-1)=-i\quad ;\quad z=\frac{-i}{i-1}\quad ;\quad z=\frac{i}{1-i}$$

Odgovor:-- $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

2° $\begin{vmatrix}1 & z & 0\\ i & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$

Odgovor:-- $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

3. a)

1° $2A+5B=$

$$=2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & 5\\ 10 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 11\\ 10 & 17\end{bmatrix}$$

Odgovor:--- $2A+5B=\begin{bmatrix}-3 & 11\\ 10 & 17\end{bmatrix}$

2°

$$3A-E+AB=3\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 10\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 19\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

Odgovor:-------------------------------------- $3A-E+AB=\begin{bmatrix}7 & 19\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

3° $AB-BA=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}5 & 10\\ 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 0 & -6\end{bmatrix}$$

Odgovor:--- $AB-BA=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 0 & -6\end{bmatrix}$

4° Odgovor:-------------------------------- $3A+5E+BA=\begin{bmatrix}7 & 7\\ 2 & 17\end{bmatrix}$

5°

$$(A\cdot B)\cdot(B\cdot A)==\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 10\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 80\\ 4 & 23\end{bmatrix}$$

Odgovor:-- $(A\cdot B)\cdot(B\cdot A)=\begin{bmatrix}15 & 80\\ 4 & 23\end{bmatrix}$

b)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 5 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

1° $2A+5B=$

$$2\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 5 & 10 & 0\\ 5 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 9 & 12 & -2\\ 5 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

Odgovor:-------------------------------------- $2A+5B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 9 & 12 & -2\\ 5 & 7 & 4\end{bmatrix}$

2° Odgovor:--------------------------- $3A - E + AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

3° Odgovor:--

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4° Odgovor:------------------------ $3A + 5E + BA = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 11 & 10 & -4 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

5° Odgovor:--

$$(A \cdot B) \cdot (B \cdot A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 7 & -1 \\ 21 & 8 & -3 \\ 26 & 14 & -1 \end{bmatrix}$$

4.

1° Odgovor:------------------------- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2x3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{2x1}$

2° Odgovor:------------------- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{1x6} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{6x1} = \begin{bmatrix} 70 \end{bmatrix}_{1x1}$

3° Odgovor:--

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{6x1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{1x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 \end{bmatrix}_{6x6}$$

4° Odgovor:------------------- $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{4x1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{4x1}$

5.

1° $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

M_{ij} je minor ; $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ je algebarski kofaktor

$\det A = 7; \quad M_{11} = 1; M_{12} = 3; M_{21} = -2; M_{22} = 1;$

$A_{11} = 1; A_{12} = -3; A_{21} = 2; A_{22} = 1;$

$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $adjA = (A^*)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$;

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} adjA = \dfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$;

Odgovor:-- $A^{-1} = \dfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

2° $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$

Odgovor:--- $A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$

3° $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ detA=1;

$$M_{11}=\begin{vmatrix}2 & 2\\2 & 3\end{vmatrix}=2;\ M_{12}=\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix}=1;\ M_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{vmatrix}=0;$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix}=1;\ M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{vmatrix}=2;\ M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=1;$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}=0;\ M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=1;\ M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=1;$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij};$

$A_{11}=2;\ A_{12}=-1;\ A_{13}=0;$

$A_{21}=-1;\ A_{22}=2;\ A_{23}=-1;$

$A_{31}=0;\ A_{32}=-1;\ A_{33}=1;$

$$adjA=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix};$$

Odgovor:-- $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

Matematika I Zbirka zadataka
FZBF

4° $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 1 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

Odgovor:--- $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\-4 & 2 & 3\\2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

5° $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & -2\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

Odgovor:-- $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 0 & 3\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

6° $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ detA=1

$$M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1;M_{12}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0;M_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0;M_{14}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{vmatrix};$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2;M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1;M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0;M_{24}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0;M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0;M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0;M_{34}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$M_{41}=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&0&0\\0&1&2\end{vmatrix}=0; M_{42}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&2\end{vmatrix}=0; M_{43}=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2; M_{44}=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij};$

$A_{11}=1;\quad A_{12}=0;\quad A_{13}=0;\quad A_{14}=0;$

$A_{21}=-2;\quad A_{22}=1;\quad A_{23}=0;\quad A_{24}=0;$

$A_{31}=0;\quad A_{32}=0;\quad A_{33}=0;\quad A_{34}=0;$

$A_{41}=0;\quad A_{42}=0;\quad A_{43}=-2;\quad A_{44}=1;$

$$A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-2&1\end{bmatrix};$$

$$adjA=\left(A^*\right)^T=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

Odgovor:------------------ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}adjA=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

7° $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\1&2&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Odgovor:------------------------------ $A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\2&-2&-2&2\\-1&2&1&-4\\0&0&0&2\end{bmatrix}$

6. $A=\begin{bmatrix}2&0&t\\0&1&-1\\1&t&2\end{bmatrix}$

Inverznu matricu ima samo matrica čija je determinanta različita od 0 (regularna matrica).

$$\det A=\begin{vmatrix}2&0&t\\0&1&-1\\1&t&2\end{vmatrix}=2(2+t)+t(-1)=t+4;\qquad \det A\neq 0\quad za\quad t\neq -4$$

Uzmimo da je

$t=0;\quad A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix}\quad;\quad \det A=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\1&0&2\end{vmatrix}\quad;\quad \det A=4$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&4&2\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

Uzmimo da je
$t=-3;$

$A=\begin{bmatrix}2&0&-3\\0&1&-1\\1&-3&2\end{bmatrix}\quad;\quad \det A=\begin{vmatrix}2&0&-3\\0&1&-1\\1&-3&2\end{vmatrix}\quad;\quad \det A=1$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-1&9&3\\-1&7&2\\-1&6&2\end{bmatrix}$$

7. a) $A=\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&0\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}$

1° 3A + X = B + E ; X = B + E -3A

a) Odgovor:------------------------------------ $X=\begin{bmatrix}-6&4\\2&-2\end{bmatrix}$

b) Odgovor:-- $X=\begin{bmatrix}-2&1&-2\\-2&0&3\\1&1&-5\end{bmatrix}$

2° A + 2 E – X = 3 B ; X=A + 2 E – 3 B ;

a) Odgovor:-- $X=\begin{bmatrix}7&-4\\-6&3\end{bmatrix}$

b) Odgovor:-- $X=\begin{bmatrix}3&-3&-2\\-2&-3&-1\\-3&-3&4\end{bmatrix}$

3° A X = B Množenjem jednakosti matricom A^{-1}, **sa leve strane** ,dobija se:

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$; $E\cdot X=A^{-1}\cdot B$; $X=A^{-1}\cdot B$;

a) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$;

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&1\\2&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\2&0\end{bmatrix}\quad;$$

Odgovor:-- $X=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\2&0\end{bmatrix}$

b)

$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-0.5\\-1&1&1\\0&0&0.5\end{bmatrix}$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}1&0&-0.5\\-1&1&1\\0&0&0.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5&0.5&1\\2&2&-1\\0.5&0.5&0\end{bmatrix}$$

Odgovor:-- $X=\begin{bmatrix}-0.5&0.5&1\\2&2&-1\\0.5&0.5&0\end{bmatrix}$

4° XA = B Množenjem jednakosti matricom A^{-1}, **sa desne strane** ,dobija se:

$X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$; $X\cdot E=B\cdot A^{-1}$; $X=B\cdot A^{-1}$;

a) Odgovor:------------------------------------- $X=\begin{bmatrix}-0.5&0.5\\1&1\end{bmatrix}$

b) Odgovor:----------------------------------- $X=\begin{bmatrix}-1&1&1.5\\-1&2&1.5\\0&1&0.5\end{bmatrix}$

5° (A +E) X = B + E Uvedimo smene C= A +E i D=B+E .
Jednačina postaje $C\cdot X=D$; $X=C^{-1}\cdot D$

$C=A+E=\begin{bmatrix}3&-1\\0&2\end{bmatrix}$; $D=B+E=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}$;

$C^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$;

$$X=C^{-1}\cdot D=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&3\\6&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Odgovor:-- $X=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

b) $C=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&-1\\0&0&3\end{bmatrix}$; $D=B+E=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&0\\1&1&1\end{bmatrix}$;

$$C^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}6&0&-2\\-3&6&3\\0&0&4\end{bmatrix};$$

$$X=C^{-1}\cdot D=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}6&0&-2\\-3&6&3\\0&0&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}4&4&4\\6&18&0\\4&4&4\end{bmatrix}$$

Odgovor:-- $X=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}4&4&4\\6&18&0\\4&4&4\end{bmatrix}$

6° X (A –E) = B – E

Uvedimo smene C= A –E i D=B-E .
Jednačina postaje $X\cdot C=D$; $X=D\cdot C^{-1}$

a) Matrica $C=A-E=\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$

nije regularna, jer je detC=0, pa nema inverznu matricu.
Odgovor:---------------------------Matrična jednačina nema rešenja.

b) $C=A-E=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$; $D=B-E=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$;

$$X=C^{-1}\cdot D$$

Matrica C nije regularna, jer je detC=0, pa nema inverznu matricu.

Odgovor:----------------------------Matrična jednačina nema rešenja.

V SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

1. Gausovom metodom rešiti sledeće sisteme :

1° $\begin{matrix}x-2y=-5\\3x+y=\ \ 6\end{matrix}$; **2°** $\begin{matrix}x+2y=1\\-2x-4y=1\end{matrix}$; **3°** $\begin{matrix}x+3y=1\\2x+6y=2\end{matrix}$;

4° $\begin{matrix}x+y-z=0\\-2x+y+3z=9\\3x-y-z=-2\end{matrix}$; **5°** $\begin{matrix}x+y-z=1\\2x+2y-2z=5\\3x+y+z=1\end{matrix}$;

6° $\begin{matrix}x+y+z=2\\-2x-2y-2z=-4\\x-y+z=0\end{matrix}$; **7°** $\begin{matrix}x+2y+3z=1\\2x+4y+6z=2\\3x+6y+9z=3\end{matrix}$;

8° $\begin{matrix}x+2y+3z=1\\2x+4y+6z=2\\3x+6y+9z=5\end{matrix}$

2. Korisćenjem Kramerove teoreme, pomoću determinanti, rešiti sledeće sisteme :

1° $\begin{matrix}x-2y=-5\\3x+y=\ \ 6\end{matrix}$; **2°** $\begin{matrix}x+2y=1\\-2x-4y=1\end{matrix}$; **3°** $\begin{matrix}x+3y=1\\2x+6y=2\end{matrix}$

4° $\begin{matrix}x+y-z=0\\-2x+y+3z=9\\3x-y-z=-2\end{matrix}$; **5°** $\begin{matrix}x+y-z=1\\2x+2y-2z=5\\3x+y+z=1\end{matrix}$;

6° $\begin{matrix}x+y+z=2\\-2x-2y-2z=-4\\x-y+z=0\end{matrix}$; **7°** $\begin{matrix}x-y+2z=1\\-x+y-2z=-1\\2x-2y+4z=2\end{matrix}$;

8° $\begin{matrix}x-y+2z=1\\-x+y-2z=-1\\2x-2y+4z=5\end{matrix}$; **9°** $\begin{matrix}ax+y=1\\x+ay=a^2\end{matrix}$;

10°
$$\begin{aligned} kx+2y-3z&=-k\\ 2x-y+z&=2 \qquad ;k\in R\\ 8x+ky-3z&=4k \end{aligned}$$

3. Matričnom metodom rešiti sledeće sisteme :

1° $\begin{aligned} x-2y&=-5\\ 3x+y&=6 \end{aligned}$; **2°** $\begin{aligned} x+y&=4\\ 2x+y&=3 \end{aligned}$;

3° $\begin{aligned} x+y+z&=2\\ x+2y+2z&=3\\ x+2y+3z&=5 \end{aligned}$ **4°** $\begin{aligned} x+y-z&=0\\ -2x+y+3z&=9\\ 3x-y-z&=-2 \end{aligned}$;

5°
$$\begin{aligned} x+2y+3z+4t&=7\\ y+2z+3t&=5\\ x+2y+z+2t&=2\\ 2y+t&=0 \end{aligned};$$

REŠENJA :

1. **Gausova metoda** se može primenjivati prilikom rešavanja sistema **m** jednačina sa **n** nepoznatih.

Korišćenjem ekvivalentnih transformacija,eliminisanjem pojedinih promenljivih, dobija se niz ekvivalentnih sistema. Jedna od promenljivih, u nekoj od jednačina, se bira za "topa".Pomoću nje se(po pravoj liniji) eliminiše odgovarajuća promenljiva u ostalim jednačinama. Posle se druga promenljiva bira za "topa". Ovaj poništava koeficijente uz svoju promenljivu u preostalim jednačinama iz kojih do tada nije bio biran "top".

Postupak traje sve dok se ne dobije sistem u kome se dobija vrednost jedne od nepoznatih.
(U sistemu sa dve promenljive, dovoljan je jedan "top" .)

1° Za "topa" se bira promenljiva **x** iz prve jednačine sistema. Množenjem prve jednačine sa -3 i sabiranjem sa drugom, eliminiše se x iz druge jednačine.

$$\begin{aligned} x-2y&=-5\\ 3x+y&=6 \end{aligned} \sim \begin{aligned} x-2y&=-5\\ 7y&=21 \end{aligned} \sim \begin{aligned} x-2y&=-5\\ y&=3 \end{aligned} \sim \begin{aligned} x&=1\\ y&=3 \end{aligned}$$

Odgovor: ---------------- Sistem ima jedno rešenje $(x,y)=(1,3)$

2° Za "topa" se bira promenljiva **x** iz prve jednačine sistema. Množenjem prve jednačine sa 2 i sabiranjem sa drugom, eliminiše se x iz druge jednačine.

$$\begin{aligned} x+2y&=1\\ -2x-4y&=1 \end{aligned} \sim \begin{aligned} x+2y&=1\\ 0&=3 \end{aligned}$$

Odgovor:---Sistem nema rešenja.

3° Za "topa" se bira promenljiva **x** iz prve jednačine sistema. Množenjem prve jednačine sa -2 i sabiranjem sa drugom, eliminiše se x iz druge jednačine.

$$\begin{aligned} x+3y&=1\\ 2x+6y&=2 \end{aligned} \sim \begin{aligned} x+3y&=1\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Odgovor: --------------Sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x,y)=(1-3t,t)$

4° Za "topa" se bira promenljiva **x** iz prve jednačine sistema.
Množenjem prve jednačine sa 2 i sabiranjem sa drugom, eliminiše se x iz druge jednačine.
Množenjem prve jednačine sa -3 i sabiranjem sa trećom, eliminiše se x iz treće jednačine.

$$\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ -2x+y+3z=9 \\ 3x-y-z=-2 \end{array} \sim \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 3y+z=9 \\ -4y+2z=-2 \end{array} \sim \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 3y+z=9 \\ -2y+z=-1 \end{array}$$

Za drugog "topa" se bira promenljiva **z** iz druge jednačine ,ekvivalentnog, dobijenog sistema. Množenjem druge jednačine sa -1 i sabiranjem sa trećom, eliminiše se z iz treće jednačine.

$$\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 3y+z=9 \\ -5y=-10 \end{array} \sim \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 3y+z=9 \\ y=2 \end{array} \sim \begin{array}{l} x+2-z=0 \\ 6+z=9 \\ y=2 \end{array} \sim \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}$$

Odgovor:-------------- Sistem ima jedno rešenje $(x, y, z)=(1, 2, 3)$

5°
$$\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=5; \\ 3x+y+z=1 \end{array}$$

Množenjem prve jednačine sa -2 i sabiranjem sa drugom, dobija se $0=3$.
Odgovor:--- Sistem nema rešenja.

6°
$$\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ -2x-2y-2z=-4; \\ x-y+z=0 \end{array}$$

Gausovim postupkom dobija se

$$\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 0=0 \\ -2y=-2 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 0=0 \\ y=1 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} z=1-x \\ 0=0 \\ y=1 \end{array}$$

Odgovor:---

Sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika
$(x, y, z)=(1-t, 1, t)) \quad t \in R$

7°
$$\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=3 \end{array} ;$$

Gausovim postupkom dobija se:

$$\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array} ; \quad x=1-2y-3z$$

Odgovor: --
Sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika
$(x, y, z)=(1-2s-3t, s, t)) \quad s,t \in R$

8°
$$\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=5 \end{array}$$

Odgovor:--- Sistem nema rešenja.

2.

Kramerova teorema se odnosi na rešavanje sistema od n linearnih jednačina sa n nepoznatih. Takav sistem se zapisuje na sledeći način :

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$
....
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{nn}x_n=b_n$$

Rešenje ovog sistema je uređena n - torka $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, koja identički zadovoljava sve jednačine.
Švajcarski matematičar Gabriel Cramer (1704. – 1752.) je ustanovio, i 1750. godine publikovao, pravilo za rešavanje ovakvih sistema sa brojnim koeficijentima.
Teorema : Neka je D determinanta ovog sistema, sastavljena od koeficijenata a_{ij} ; $i, j=1...n$. Determinante D_i (i =1,2, ...,

n) dobijaju se zamenom i – te kolone determinante D brojevima $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. Tada :

1) Ako je $D \neq 0$ sistem ima **jedinstveno rešenje**

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \left(\frac{D_1}{D}; \frac{D_2}{D}; \cdots \frac{D_n}{D}\right)$$

2) Ako je D = 0 i bar jedna od determinanti D_i (i =1,2, ..., n) različita od 0
sistem **nema rešenja** .

3) Ako je $D = D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0$ sistem ima **beskonačno mnogo rešenja** ili uopšte **nema rešenja**. (Kramerova teorema ne daje odgovor na pitanje broja rešenja sistema, izuzev u slučaju kada je n = 2 , i tada ih ima beskonačno mnogo.)

1°

$$\begin{aligned} x - 2y &= -5 \\ 3x + y &= 6 \end{aligned}$$

Rešenje : $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \qquad D_x = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 7$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 21$

$(x\ , y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{7}{7}; \frac{21}{7}\right) = (1;3)$ sistem ima **jedinstveno rešenje**

2°

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ -2x - 4y &= 1 \end{aligned}$$

Rešenje : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6$

D = 0 i jedna od determinanti $D_x \neq 0$ pa sistem **nema rešenja** .

3°

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + 6y &= 2 \end{aligned}$$

Rešenje : $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$D = D_x = D_y = 0$ sistem ima **beskonačno mnogo rešenja oblika** $(x\ , y) = (1 - 3t, t))$

4°

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2x + y + 3z &= 9 \\ 3x - y - z &= -2 \end{aligned}$$

Rešenje :

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 9 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 20 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 30$

$(x\ , y, z) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}; \frac{D_z}{D};\right) = \left(\frac{10}{10}; \frac{20}{10}; \frac{30}{10}\right) = (1;2;3)$

sistem ima **jedinstveno rešenje**

5°

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 2y - 2z &= 5 \\ 3x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$

D = 0 i $D_1 \neq 0$ sistem nema rešenja

6°

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -2x - 2y - 2z &= -4 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \quad D_x=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ -4 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & -4 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \quad D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & -2 & -4\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$D=D_1=D_2=\cdots=D_n=0$ sistem ima **beskonačno mnogo rešenja** ili uopšte **nema rešenja** (Kramerova teorema ne daje odgovor nego se koristi neka druga metoda.). Gausovim postupkom dobija se

$$\begin{aligned} x+\ y+\ z&=2\\ 0&=0\\ -2y\ &=-2\end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} x+\ y+\ z&=2\\ 0&=0\\ y&=1\end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} z&=1-x\\ 0&=0\\ y&=1\end{aligned}$$

sistem ima **beskonačno mnogo rešenja** oblika
$(x\ ,y,z)=(1-t,1,t))\quad t\in R$

7°

$$\begin{aligned} x-\ y+2z&=1\\ -x+\ y-2z&=-1\\ 2x-2y+4z&=2\end{aligned}$$

U ovom primeru je $D=D_x=D_y=D_n=0$ Svaka od determinanti ima proporcionalne bar po dve vrste ili kolone. Gausovim postupkom dobija se

$$\begin{aligned} x-\ y+\ 2z&=1\\ 0&=0\\ 0&=0\end{aligned}$$

sistem ima **beskonačno mnogo rešenja** oblika
$(x,y,z)=(1+s-2t,s,t))\quad s,t\in R$

8°

$$\begin{aligned} x-\ y+2z&=1\\ -x+\ y-2z&=-1\\ 2x-2y+4z&=5\end{aligned}$$

I ovde je $D=D_x=D_y=D_n=0$ svaka od determinanti ima proporcionalne bar po dve vrste ili kolone. Gausovim postupkom

$$\begin{aligned} x-\ y+\ 2z&=1\\ 0&=0\\ 0&=5\end{aligned}$$

dobija se pa sistem **nema rešenja** .

9°

$$\begin{aligned} ax+y&=1\\ x+ay&=a^2\end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a^2-1=(a-1)(a+1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a^2 & a\end{vmatrix}=a-a^2=a(1-a)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & a^2\end{vmatrix}=a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$$

1) Ako je $D\neq 0$,odnosno $a\neq 1\wedge a\neq -1$ sistem ima **jedinstveno rešenje**

2) U slučaju da je a = -1 sistem glasi: $\begin{aligned} -x+y&=1\\ x-y&=1\end{aligned}$

$D=0$ i $D_x=-2$, $D_y=-2$ sistem **nema rešenja** .

3) U slučaju da je a = 1 sistem glasi: $\begin{aligned} x+y&=1\\ x+y&=1\end{aligned}$

$D=D_x=D_y=0$ sistem ima **beskonačno mnogo rešenja oblika**
$(x\ ,y)=(1-t,t))\quad t\in R$

10°

$$\begin{aligned} kx+2y-3z&=-k\\ 2x-\ y+\ z&=2\\ 8x+ky-3z&=4k\end{aligned}\quad ;k\in R$$

$$D=\begin{vmatrix}k & 2 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ 8 & k & -3\end{vmatrix}=-k^2-3k+4=-(k-1)(k+4)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-k & 2 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ 4k & k & -3\end{vmatrix}=k^2-13k+12=(k-12)(k-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}k & -k & -3\\ 2 & 2 & 1\\ 8 & 4k & -3\end{vmatrix}=-4k^2-44k+48=-4(k-1)(k+12)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}k & 2 & -k\\ 2 & -1 & 2\\ 8 & k & 4k\end{vmatrix}=-8k^2-24k+32=-8(k-1)(k+4)$$

1) Ako je $D\neq 0$, odnosno, $k\neq 1\wedge k\neq -4$ sistem ima **jedinstveno rešenje**

$$(x;y,z)=\left(\frac{(k-12)(k-1)}{-(k-1)(k+4)};\frac{-4(k-1)(k+12)}{-(k-1)(k+4)};\frac{-8(k-1)(k+4)}{-(k-1)(k+4)}\right)=$$

$$=\left(\frac{(k-12)}{-(k+4)};\frac{4(k+12)}{(k+4)};8\right)$$

2) Ako je $D=0$ za k = - 4 bar jedna od determinanti je različita od nule, npr. $D_x=80$ sistem **nema rešenja** .

3) Ako je k = 1 onda je $D=D_x=D_y=D_z=0$ vrše se dodatna ispitivanja.

Sistem sada glasi
$$\begin{aligned}x+2y-3z&=-1\\ 2x-\ y+\ z&=2\\ 8x+\ y-3z&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+2y-3z&=-1\\ -5y+7z&=4\\ -15y+21z&=12\end{aligned}\qquad\begin{aligned}x+2y-3z&=-1\\ -5y+7z&=4\\ -5y+7z&=4\end{aligned}$$

Sistem od tri jednačine svodi se na sistem od dve jednačine sa tri nepoznate, i ima **beskonačno mnogo rešenja** oblika

$$(x,y,z)=\left(\frac{t+3}{5},\frac{7t-4}{5},t\right)\quad t\in R$$

3.

Rešavanje sistema matričnom metodom svodi se na rešavanje matrične jednačine $A\cdot X=B$.

A - matrica sistema (sastoji se od koeficijenata koji stoje uz nepoznate).

X - matrica kolona i ona se sastoji od nepoznatih.

B - matrica kolona (sastoji se od koeficijenata koji stoje na desnoj strani u jednačinama sistema).

$A\cdot X=B;$ Množenjem sa, leve strane, inverznom matricom dobija se:

$X=A^{-1}\cdot B;$

Ovom metodom mogu se rešavati samo kvadratni sistemi i to samo oni koji imaju regularnu matricu sistema. ($\det A\neq 0$)

1° $\begin{aligned}x-2y&=-5\\ 3x+y&=6\end{aligned}$; $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-5\\ 6\end{bmatrix}$;

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}adjA=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix};$$

$$X=A^{-1}\cdot B;\quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix};$$

Odgovor: -- $(x,y)=(1;3)$

2° $\begin{aligned}x+y&=4\\ 2x+y&=3\end{aligned}$; detA= -1;

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}adjA=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 5\end{bmatrix};$$

Odgovor:-- $(x,y)=(-1;5)$

3°
$$\begin{aligned} x+\ y+\ z&=2\\ x+2y+2z&=3\ ;\\ x+2y+3z&=5 \end{aligned} \qquad A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix};$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ ;\quad B=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}\ ;\ \text{detA}=1;$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix};\qquad X=A^{-1}\cdot B;$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Odgovor: -- $(x,y,z)=(1,-1,2)$

4°
$$\begin{aligned} x+\ y-\ z&=0\\ -2x+y+3z&=9\ ;\\ 3x-y-z&=-2 \end{aligned} \quad A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&1&3\\3&-1&-1\end{bmatrix};$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ ;\quad B=\begin{bmatrix}0\\9\\-2\end{bmatrix}\ ;\quad \text{detA}=10;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&2&4\\7&2&-1\\-1&4&3\end{bmatrix};\qquad X=A^{-1}\cdot B;$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&2&4\\7&2&-1\\-1&4&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\9\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Odgovor: -- $(x,y,z)=(1,2\ 3)$

5°
$$\begin{aligned} x+\ 2y+3z+4t&=7\\ y+2z+3t&=5\\ x+\ 2y+\ z+2t&=3\\ 2y+\qquad t&=0 \end{aligned}\ ;\qquad A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\1&2&1&2\\0&2&0&1\end{bmatrix};$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\ ;\quad B=\begin{bmatrix}7\\5\\3\\0\end{bmatrix}\ ;\qquad \text{detA}=2;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&0&3&-2\\2&-2&-2&2\\5&-4&-5&2\\-4&4&4&-2\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B;\qquad \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&0&3&-2\\2&-2&-2&2\\5&-4&-5&2\\-4&4&4&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\5\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

Odgovor: ---------------------------------- $(x,y,z,t)=(1,-1,0,2)$

VI VEKTORI

1. Odrediti λ tako da $\vec{a}=(1,\lambda,-2)$ i $\vec{b}=(2\lambda,3,5)$ budu normalni.

2. Dato je :

1° $\vec{a}=(1,0,-1)$ i $\vec{b}=(1,-2,-2)$

2° $\vec{a}=(1,0,-1)$ i $\vec{b}=(-1,2,2)$

3° $\vec{a}=(2,0,-3)$ i $\vec{b}=(-3,5,2)$

a) Odrediti ugao α izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

b) Odrediti skalarne projekcije $spr_{\vec{b}}\vec{a}$ i $spr_{\vec{a}}\vec{b}$.

3. Date su tačke A (5,2,-1) B(1,-3,4) C(-2,1,3) D(2,6,-2).
Odrediti ugao izmedju vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

4. Dati su vektori: $\vec{a}=(1,0,-1)$, $\vec{b}=(1,-2,-2)$ i $\vec{c}=(0,0,2)$.
Izračunati:

a) Površinu paralelograma koji obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

b) Jedinični vektor $\vec{n}$ tako da je $\vec{n}\perp\vec{a}$ i $\vec{n}\perp\vec{b}$.

c) Zapreminu paralelopipeda koga obrazuju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

5. Ispitati da li tačke A, B, C i D pripadaju istoj ravni:

1° A(-1, 0, 1), B(2, 1, 4), C(-1, 1, 1), D(6, 2, 10)

2° A(2, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, -2), D(1, 1, 3)

Ako tačke ne pripadaju istoj ravni izračunati:

a) Površinu trougla ABC.
b) Zapreminu piramide ABCD.

REŠENJA :

1. Da bi vektori bili normalni neophodno je i dovoljno da za njihov skalarni proizvod važi: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; $(1,\lambda,-2)\cdot(2\lambda,3,5)=0$;
$2\lambda+3\lambda-10=0$; $\lambda=2$

Odgovor:-- $\lambda=2$

2. Neka je α ugao izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$; $\alpha=\arccos\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

α je ugao iz intervala $[0,\pi]$ čiji je kosinus jednak $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

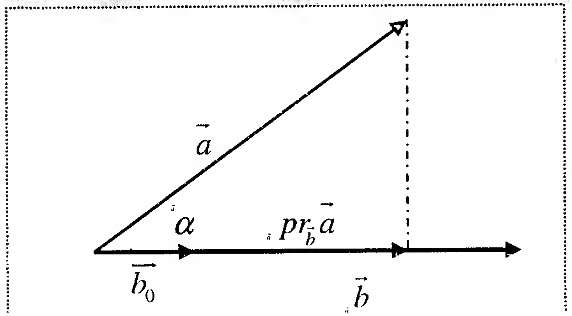
b) Treba razlikovati **skalarnu projekciju** $spr_{\vec{b}}\vec{a}$ i

projekciju $pr_{\vec{b}}\vec{a}$.

Skalarna projekcija je broj (može se označiti sa λ).

Projekcija $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ je vektor,istog pravca kao vektor $\vec{b}$ na koji se projektuje vektor $\vec{a}$.

Važi sledeća veza: $pr_{\vec{b}}\vec{a}=spr_{\vec{b}}\vec{a}\cdot\vec{b_0}=\lambda\vec{b_0}$, gde je $\vec{b_0}$ jedinični vektor vektora $\vec{b}$.



$spr_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$;

$pr_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\vec{b_0}$

3. 1° $\vec{a}=(1,0,-1)$ i $\vec{b}=(1,-2,-2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=1\cdot1+0\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)=3$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\quad;\quad|\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_{21}^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\quad;\quad\alpha=\arccos\frac{3}{\sqrt{2}\cdot3}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

a)Odgovor:-- $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

b) Odgovor:----------------- $spr_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=1$; $spr_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

2° $\vec{a}=(1,0,-1)$ i $\vec{b}=(-1,2,2)$

$$\alpha=\arccos\frac{-3}{\sqrt{2}\cdot3}=\arccos\frac{-1}{\sqrt{2}}=\arccos\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

a)Odgovor:-- $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

b) Odgovor:------------- $spr_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-1$; $spr_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{2}}$

3° $\vec{a}=(2,0,-3)$ i $\vec{b}=(-3,5,2)$

a)Odgovor:-------------------------------------- $\alpha=\arccos\dfrac{-12}{\sqrt{13}\sqrt{38}}$

b) Odgovor:------------- $spr_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{-12}{\sqrt{38}}$; $spr_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{-12}{\sqrt{13}}$

3.Date su tačke A (5,2,-1) B(1,-3,4) C(-2,1,3) D(2,6,-2).

Da bi se odredio ugao izmedju vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$ treba izračunati koordinate ovih vektora.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2,1,3)-(5,2,-1)=(-7,-1,4)\quad;$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(2,6,-2)-(1,-3,4)=(1,9,-6)$$

Odgovor:-- $\alpha=\arccos\dfrac{-40}{\sqrt{66}\sqrt{118}}$

4. $\vec{a}=(1,0,-1)$, $\vec{b}=(1,-2,-2)$ i $\vec{c}=(0,0,2)$. Izračunati:

a) Površina paralelograma, kojeg obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$,dobija se izračunavanjem intenziteta vektora $\vec{a}\times\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\1&-2&-2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0&-1\\-2&-2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&-1\\1&-2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&0\\1&-2\end{vmatrix}=(-2,1,-2)$$

$$P=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=3$$

Odgovor:-- P=3

b)

$\vec{a}\times\vec{b}$ je vektor koji je, po definiciji, normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Jedinični vektor $\vec{n}$, takav da je $\vec{n}\perp\vec{a}$ i $\vec{n}\perp\vec{b}$, dobija se normiranjem vektora $\vec{a}\times\vec{b}$.

Odgovor:---

$$\vec{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}}{3}=-\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

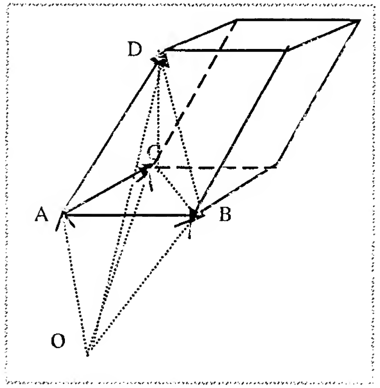
c) Zapremina paralelopipeda koga obrazuju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dobija se izračunavanjem mešovitog proizvoda ovih vektora $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$. Ako se sa D označi determinanta, pomoću koje se izračunava mešoviti proizvod, važi $V=|D|=|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$.

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&-2&-2\\0&0&2\end{vmatrix}=-4\quad;\quad V=|D|=|-4|=4$$

Odgovor:--- V=4

5. Ispitivanje da li tačke A, B, C i D pripadaju istoj ravni(da li su komplanarne)svodi se na izračunavanje mešovitog proizvoda vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *i* $\overrightarrow{AD}$ .Ako je mešoviti proizvod jednak 0, tačke su u istoj ravni(komplanarne su).

1° A(-1, 0, 1), B(2, 1, 4), C(-1, 1, 1), D(6, 2, 10)



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,1,4)-(-1,0,1)=(3,1,3)$;

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-1,1,1)-(-1,0,1)=(0,1,0)$;

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(6,2,10)-(-1,0,1)=(7,2,9)$;

$$D=\begin{vmatrix}3&1&3\\0&1&0\\7&2&9\end{vmatrix}=6$$; Mešoviti proizvod je $\neq 0$,što znači da tačke nisu u istoj ravni.

a) Površina trougla ABC dobija se preko vektorskog proizvoda $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&3\\0&1&0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&3\\1&0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3&3\\0&0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}=(-3,0,3).$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+3^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

b) Zapremina piramide ABCD dobija se preko zapremine paralelopipeda koga formiraju vektori $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ *i* $\overrightarrow{AD}$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|D|=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$;

$$D=\begin{vmatrix}3&1&3\\0&1&0\\7&2&9\end{vmatrix}=6 \quad ; \quad V_{ABCD}=\frac{1}{6}|D|=\frac{1}{6}6=1$$

Odgovor: a)-- $P_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

b)-- $V_{ABCD}=1$

2° A(2, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, -2), D(1, 1, 3)

$\overrightarrow{AB}=(-2,1,0)$; $\overrightarrow{AC}=(-2,0,-2)$; $\overrightarrow{AD}=(-1,1,3)$;

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,4,2)$

Odgovor: a)-- $P_{\Delta ABC}=\sqrt{6}$

b)-- $V_{ABCD}=\frac{2}{3}$

VII RAVAN

1. Odrediti jednačinu ravni ako je dat njen normalni vektor i tačka M koja joj pripada:

1° $\vec{n} = (1,5,3)$; $M(0,2,-1)$

2° $\vec{n} = (4,0,-1)$; $M(1,2,-3)$

2. Odrediti jednačinu ravni koja je određena tačkama M_1, M_2 i M_3

1° $M_1 = (1,2,-3)$; $M_2(0,-1,3)$; $M_3(5,2,4)$

2° $M_1 = (0,0,0)$; $M_2(4,1,2)$; $M_3(-1,2,4)$

3. Odrediti jednačinu ravni π koja sadrži tačke $M_1(1,2,-3)$; $M_2(0,-1,3)$ i paralelna je sa osom :

1° Ox

2° Oy

3° Oz

4. Odrediti segmentni i opšti oblik jednačine ravni kojoj su odsečci na koordinatnim osama

1° a=3 ; b=2 ; c=1

2° a=5 ; b=2 ; c=0

3° a=3 ; b=0 ; c=-1

4° a=0 ; b=-4 ; c=1

5. Odrediti odsečke na koordinatnim osama za ravni :

1° (π_1) 2x + 3y +z -1= 0

2° (π_2) 5x – 4y +3z+3=0

3° (π_3) 3x + 5z -2 =0

6. Odrediti jednačinu ravni π koja sadrži tačke $M_1 = (1,2,-3)$; $M_2(0,-1,3)$ i na osi Ox ima odsečak a =5 .

7. Odrediti jednačinu ravni π koja sadrži tačku P(2 ,1 , -1), na osi Ox ima odsečak a =3 i na osi Oy ima odsečak b= -2 .

8. Odrediti uglove koje normalni vektor ravni (π) zaklapa sa koordinatnim osama .

1° (π) x – y + 5 =0

2° (π) x – y + 2z +1 =0

9. Odrediti ugao između dve ravni :

1° (π_1) x- 2y -2z +1=0 ; (π_2) x- z +3=0

2° (π_1) 2x- 2y +3z -1=0 ; (π_2) 4x+ 2y -2 z +3=0

REŠENJA :

1.

Jednačina ravni kojoj je normalni vektor $\vec{n} = (A,B,C)$ i tačka $M(x_0, y_0, z_0)$ glasi:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

1° $\vec{n} = (1,5,3)$; $M(0,2,-1)$

$$1(x-0)+5(y-2)+3(z+1)=0$$

Odgovor:--------------------Jednačina ravni glasi $x+5y+3z-7=0$

2° $\vec{n} = (4,0,-1)$; $M(1,2,-3)$

Odgovor:--------------------------Jednačina ravni glasi $4x-z-7=0$

2.

Jednačina ravni koja je određena tačkama $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$ dobija se izračunavanjem determinante :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

1° $M_1 = (1,2,-3)$; $M_2(0,-1,3)$; $M_3(5,2,4)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0-1 & -1-2 & 3+3 \\ 5-1 & 2-2 & 4+3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -1 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0; -21x+31y+12z-5$$

Odgovor:--------------Jednačina ravni glasi $-21x+31y+12z-5=0$

2° $M_1 = (0,0,0)$; $M_2(4,1,2)$; $M_3(-1,2,4)$

Odgovor:------------------------------Jednačina ravni glasi $2y-z=0$

3.

1° Jednačina ravni π, kojoj je normalni vektor $\vec{n} = (A,B,C)$, traži se u obliku $Ax+By+Cz+D=0$

Da bi ravan bila paralelna sa osom Ox mora njen normalni vektor $\vec{n}$ biti normalan na osu Ox a samim tim i na njen jedinični vektor $\vec{i}=(1,0,0)$.

$\vec{n}\perp\vec{i}$; $\vec{n}\cdot\vec{i}=o$; $(A,B,C)\cdot(1,0,0)=0 \Rightarrow A=0$

$(\pi)\quad By+Cz+D=0$

$M_1(1,2,-3)$; $M_1\in(\pi)\quad B\cdot 2+C\cdot(-3)+D=0 \quad (1)$

$M_2(0,-1,3)$; $M_2\in(\pi)\quad B\cdot(-1)+C\cdot 3+D=0 \quad (2)$

Iz jednačina (1) i (2) se dobija da je $B=2C \quad i \quad D=-C$

$(\pi)\quad 2Cy+Cz-C=0$

Odgovor:--------------------------Jednačina ravni $(\pi)\quad 2y+z-1=0$

2°

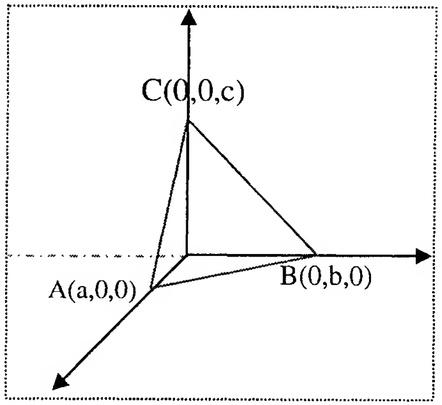
Odgovor:--------------------------Jednačina ravni $(\pi)\quad 6x+z-3=0$

3°

Odgovor:---------------------------Jednačina ravni $(\pi)-3x+y+1=0$

4.

Segmentni oblik jednačine ravni, kojoj su odsečci na koordinatnim osama a,b,c glasi: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.



1° a=3 ; b=2 ; c=1

Odgovor:----------------------Jednačina ravni glasi: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$

2° a=5 ; b=2 ; c=0

Odgovor:----------------------------Jednačina ravni glasi: $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$

3° a=3 ; b=0 ; c=-1

Odgovor:----------------------------Jednačina ravni glasi: $\frac{x}{3}+\frac{z}{1}=1$

4° a=0 ; b=-4 ; c=1

Odgovor:--------------------------Jednačina ravni glasi: $\frac{y}{-4}+\frac{z}{1}=1$

5.

Da bi se dobili odsečci na koordinatnim osama, potrebno je jednačinu ravni dovesti u segmentni oblik $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

1° (π_1) 2x + 3y +z -1= 0

$2x+3y+z=1$; $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}+\frac{z}{1}=1$

Odgovor:------------------------------ Odsečci su $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$; $c=1$

2° (π_2) 5x – 4y +3z+3=0

Odgovor:------------------------- Odsečci su $a=-\frac{3}{5}$; $b=\frac{3}{4}$; $c=-1$

3° (π_3) 3x + 5z -2 =0

Odgovor:--------------------------- Odsečci su $a=\frac{2}{3}$; $b=0$; $c=\frac{2}{5}$

6.

Jednačinu ravni π koja na osi Ox ima odsečak a =5 traži se u obliku $\frac{x}{5}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

$M_1(1,2,-3)$; $M_1\in(\pi)\quad \frac{1}{5}+\frac{2}{b}+\frac{-3}{c}=1 \quad (1)$

$M_2(0,-1,3)$; $M_2\in(\pi)\quad \frac{0}{5}+\frac{-1}{b}+\frac{3}{c}=1 \quad (2)$

Iz jednačina (1) i (2) se dobija da je $b=\frac{15}{27} \quad i \quad c=\frac{15}{14}$

$$(\pi)\quad \frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{15}{27}}+\frac{z}{\frac{15}{14}}=1$$

Odgovor:------------------Jednačina ravni $(\pi)\, 3x+27y+14z-15=0$

7.

Jednačina ravni π koja na osi Ox ima odsečak a =3 i na osi Oy ima odsečak b= -2 traži se u obliku $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{c}=1$.

$$P(2,1,-1)\in(\pi)\quad \frac{2}{3}+\frac{1}{-2}+\frac{-1}{c}=1\quad ;\quad c=-\frac{6}{5}$$

Odgovor:----------------------Jednačina ravni $(\pi)\, 2x-3y-5z-6=0$

8.

Uglovi α,β,γ koje normalni vektor $\vec{n}=(A,B,C)$ ravni (π) zaklapa sa koordinatnim osama dobijaju se normiranjem tog vektora. Jedinični vektor $\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

1° (π) x – y + 5 =0 $\quad \vec{n}=(1,-1,0)$

$$\vec{n}_0=\frac{1\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=0$$

Odgovor:-- $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{2}$

2° (π) x – y + 2z +1 =0

Odgovor:------------ $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{6}},\ \beta=\arccos\frac{-1}{\sqrt{6}},\ \gamma=\arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$

9.

Ugao između dve ravni je ugao α koji obrazuju njihovi normalni vektori $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$.

1° (π_1) x- 2y -2z +1=0

(π_2) x- z +3=0

$\overrightarrow{n_1}=(1,-2,-2)$-normalni vektor ravni π_1

$\overrightarrow{n_2}=(1,0,-1)$-normalni vektor ravni π_2

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\quad ;\quad \alpha=\arccos\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\arccos\frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Odgovor:--- $\alpha=\frac{\pi}{4}$

2° (π_1) 2x- 2y +3z -1=0

(π_2) 4x+ 2y -2 z +3=0

Odgovor:--- $\alpha=\arccos\frac{-1}{\sqrt{17}\sqrt{6}}$

VIII PRAVA

1. Odrediti jednačinu prave (p) ako je dat vektor pravca prave $\vec{a}$ i tačka M koja joj pripada:

1° $\vec{a} = (1,5,3)$; $M(0,2,-1)$

2° $\vec{a} = (4,0,-1)$; $M(1,2,-3)$

2. Data je prava (p) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{-1}$ .Odrediti tri tačke koje joj pripadaju.

3. Data je prava (p) kao presek ravni π_1 i π_2

$$\begin{cases} (\pi_1): x-2y+z+5=0 \\ (\pi_2): 3x+y+4z-6=0 \end{cases}$$

Odrediti njen dvojni simetrični oblik.

4. Date su prava (p) i tačka A.

1° (p) $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$ i tačka A(-1,0,2).

2° (p) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ i tačka A(-2,1,4).

Odrediti jednačinu ravni (π) koju one određuju.

5. Date su prave (p_1) i (p_2).Ispitati njihov međusobni položaj u prostoru i ako određuju ravan, naći njenu jednačinu.

1° (p_1) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{-1}$ (p_2) $\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{1}$

2° (p_1) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ (p_2) $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-4}{5}$

3° (p_1) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{1}$ (p_2) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-2}{-1}$

6. Odrediti jednačinu prave koja je određena tačkama M_1 i M_2.

1° $M_1 = (1,5,3)$; $M_2(0,2,-1)$

2° $M_1 = (0,-1,1)$; $M_2(4,2,5)$

7. Data je ravan (π) i prava (p).

1° $(\pi)\ 4x+2y-2z+1=0$ (p) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$

VEŽBE

2° $(\pi)\ 3x-5y+z+1=0$ (p) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$

3° $(\pi)\ x+2y+2z+1=0$ (p) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z-2}{1}$

a) Ispitati njihov međusobni položaj u prostoru i ako postoji, naći zajedničku tačku .

b) Odrediti ugao između prave i ravni.

8. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku M(3,1,4) i paralelna je sa dve date prave:

(p_1) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{1}$ i (p_2) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-2}{-1}$.

REŠENJA :

1.

1° $\vec{a}=(1,5,3)$; $M(0,2,-1)$

Odgovor:-- $(p)\quad \frac{x}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+1}{3}$

2° $\vec{a}=(4,0,-1)$; $M(1,2,-3)$

Odgovor:--

$(p)\quad \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{-1}$

2. Iz jednačine prave date u dvojnom simetričnom obliku

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1}=t$,

dobija se parametarski oblik:

$x=3t+1$

$y=t-2$

$z=-t+4$

Zadavanjem različitih vrednosti za t, dobijaju se tačke koje pripadaju pravoj.

Odgovor:---

A(1,-2, 4) (za t=0)

B(4,-1, 3) (za t=1)

C(-2,-3, 5) (za t= -1)

3. $\begin{cases}(\pi_1): x-2y+z+5=0\\(\pi_2): 3x+y+4z-6=0\end{cases}$

Neka je: $\vec{a}$-vektor pravca prave (p)

$\vec{n_1}=(1,-2,1)$-normalni vektor ravni π_1

$\vec{n_2}=(3,1,4)$-normalni vektor ravni π_2

$\vec{a}\perp\vec{n_1}$; $\vec{a}\perp\vec{n_2}$;

$\vec{a}$ se dobija kao vektorski proizvod vektora $\vec{n_1}$ i $\vec{n_2}$.

$$\vec{a}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&1\\3&1&4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2&1\\1&4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}=$$

$$=-9\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k}=(-9,-1,7)$$

Potrebno je još dobiti bilo koju tačku koja pripada pravoj.

Na primer, rešavanjem sistema

$\begin{cases}z=0\\x-2y+z+5=0\\3x+y+4z-6=0\end{cases}$; $\begin{cases}z=0\\x-2y=-5\\3x+y=6\end{cases}$; $\begin{cases}z=0\\x=1\\y=3\end{cases}$

dobijaju se koordinate takve tačke A(1,3, 0).

(To je tačka u kojoj prava (p) prodire ravan $z=0$.)

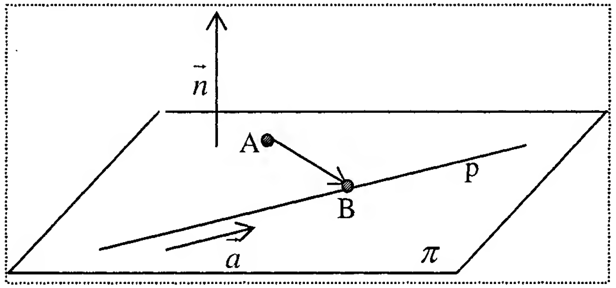
Odgovor:-- (p) $\frac{x-1}{-9}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{7}$

4. .

1° (p) $\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{3}$ i tačka A(-1,0,2).

Prvo se, uvrštavanjem koordinata tačaka u jednačinu prave, proverava da li tačka pripada pravoj. U ovom primeru $A\notin p$, što znači da tačka i prava određuju tačno jednu ravan.

I način:



Treba odrediti jednu tačku koja pripada pravoj (p) npr. B(3,-1,1), a zatim se nalaze koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,-1,1)-(-1,0,2)=(4,-1,-1)$.

Vektori $\vec{a}=(0,-1,3)$ i $\overrightarrow{AB}=(4,-1,-1)$ moraju biti normalni na vektor $\vec{n}$ - normalni vektor tražene ravni.

Vektor, koji je normalan na dva data vektora, se dobija nalaženjem njihovog vektorskog proizvoda.

$$\vec{a}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & -1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=4\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=4(1,3,1)$$

Za normalni vektor ravni $\vec{n}$ uzima se vektor $\vec{n}=(1,3,1)$ koji je takođe normalan na $\vec{a}$ i $\overrightarrow{AB}$ samo su mu koordinate " lepše".

Jednačina ravni kojoj je poznat normalni vektor $\vec{n}=(1,3,1)$ i jedna tačka A(-1,0,2) glasi:

$1(x+1)+3(y-0)+1(z-2)=0 \quad ; \quad x+3y+z-1=0$

II način:

Iz jednačine prave $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}=t$, zadavanjem konkretnih vrednosti za t, odrede se dve tačke koje joj pripadaju.

Na primer, B(3,-1,1) (za t=0) i C(3,-2,4) (za t=1) .

Korišćenjem formule za jednačinu ravni kroz tri tačke A(-1,0,2), B(3,-1,1) i C(3,-2,4) dobija se :

$$\begin{vmatrix}x+1 & y & z-2\\ 3+1 & -1 & 1-2\\ 3+1 & -2 & 4-2\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \begin{vmatrix}x+1 & y & z-2\\ 3+1 & -1 & 1-2\\ 3+1 & -2 & 4-2\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad x+3y+z-1=0$$

Odgovor:---(π) x + 3y +z -1= 0

2° (p) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ i tačka A(-2,1,4).

Odgovor:---------------------------------------(π) -6x + y -11z +31= 0

5.

Dve prave u prostoru mogu biti u sledećim međusobnim položajima :

a) **paralelne su**

- ako se poklapaju, ne određuju ravan
- ako nemaju zajedničkih tačaka, određuju ravan

b) **seku se** -određuju ravan

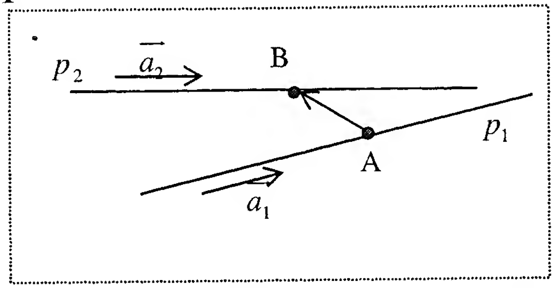
c) **mimoilaze se** - ne određuju ravan

Položaj pravih u prostoru određuje se pomoću vektora $\vec{a_1},\vec{a_2}$ i $\overrightarrow{AB}$.

Ako su oni komplanarni prave određuju ravan a ako nisu , ne određuju. Pitanje komplanarnosti rešava se pomoću mešovitog proizvoda vektora. Ako je mešoviti proizvod jednak 0, komplanarni su.

Paralelne prave imaju kolinerane vektore pravca.

1°



$(p_1)\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{-1} \qquad (p_2)\ \dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{1}$

$\vec{a_1}=(2,3,-1),\quad \vec{a_2}=(-2,-3,1) \qquad \vec{a_1}=k\vec{a_2}=(-1)\vec{a_2}$

Prave su paralelne ali se ne poklapaju .

(Tačka $B(-2,0,0)$ pripada pravoj (p_2) a ne pripada pravoj (p_1) .)

Jednačina ravni, koju određuju ove prave, može se odrediti pomoću tri tačke. Uzimaju se dve tačke sa jedne prave a jedna sa druge.

Tačke A(1,-2,0) i C(3,1,-1) pripadaju pravoj (p_1) .

Tačka $B(-2,0,0)$ pripada pravoj (p_2).

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z\\ -2-1 & 0+2 & 0\\ 3-1 & 1+2 & -1\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z\\ -3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=0 \quad ;$$

$$2x+3y+13z+4=0$$

Odgovor:--

Paralelne prave određuju ravan $\qquad 2x+3y+13z+4=0$

2° $(p_1)\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{-1} \quad (p_2)\ \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-4}{5}$

$\vec{a_1}=(1,3,-1),\quad \vec{a_2}=(2,-2,5)$; $\qquad$ A(2,1,-1) ; B(4,-1,4)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,-1,4)-(2,1,-1)=(2,-2,5)$

$$\left|\left[\vec{a_1},\vec{a_2},\overrightarrow{AB}\right]\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ Prave se seku.

Jednačina ravni koju određuju ove prave može se odrediti pomoću tri tačke. Uzimaju se dve tačke sa jedne prave a jedna sa druge.
Tačke A(2,1,-1) i C(3,4,-2) pripadaju pravoj (p_1).
Tačka B(4,-1,4) pripada pravoj (p_2).
Odgovor:---
Prave se seku i određuju ravan $-13x+7y+8z+27=0$.

3° $(p_1)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{1}$ $\quad (p_2)\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-1}$

$\vec{a_1}=(1,2,1),\quad \vec{a_2}=(2,0,-1)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,1,2)-(1,0,-3)=(-3,1,5)$

$$\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{AB}\right]\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

Odgovor:---
Prave se mimoilaze pa ne određuju ravan.

6.

Jednačina prave koja je određena tačkama $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M_2(x_2,y_2,z_2)$ glasi :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

1° $M_1=(1,5,3)$; $M_2(0,2,-1)$ $\quad \frac{x-1}{0-1}=\frac{y-5}{2-5}=\frac{z-3}{-1-3}$;

Odgovor:-- $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-3}{-4}$

2° $M_1=(0,-1,1)$; $M_2(4,2,5)$

Odgovor:-- $\frac{x}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$

7.

Prava i ravan mogu :

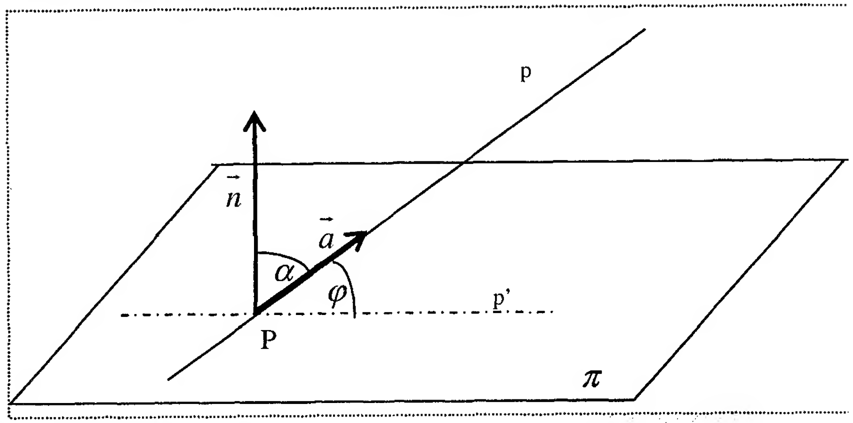
a) da budu **paralelne**
- ako prava pripada ravni
- ako nemaju zajedničkih tačaka

b) da se **seku** - da imaju tačno jednu zajedničku tačku

Pod uglom između prave i ravni podrazumeva se ugao između prave (p) i njene normalne projekcije na tu ravan (p').
Ugao između prave i ravni φ dobija se preko ugla α koga zaklapaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{n}$.

$\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$; gde je $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}$; $\alpha=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}$



1° $(\pi)\ 4x+2y-2z+1=0$ $\quad$ (p) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-1}$

$\vec{n}=(4,2,-2)$; $\vec{a}=(2,1,-1)$ Vektori $\vec{a}$ i $\vec{n}$ su kolinearni jer je $\vec{n}=2\vec{a}$.

To znači da je prava normalna na ravan i da ima jednu zajedničku tačku sa njom.
Iz jednačine prave date u dvojnom simetričnom obliku

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-1}=t$$

dobija se parametarski oblik: $\begin{aligned} x &= 2t+1 \\ y &= t-3 \\ z &= -t+2 \end{aligned}$

Zamenom u jednačinu ravni dobija se

$4(2t+1)+2(t-3)-2(-t+2)+1=0 \quad ; \quad t=\frac{5}{12}$

Tačka prodora P ima koordinate : $\begin{aligned} x &= 2\cdot\frac{5}{12}+1=\frac{22}{12} \\ y &= \frac{5}{12}-3=-\frac{31}{12} \\ z &= -\frac{5}{12}+2=\frac{19}{12} \end{aligned}$

Odgovor:

a)----------------------Prava prodire ravan u tački $P\left(\frac{22}{12},-\frac{31}{12},\frac{19}{12}\right)$

b)-- $\varphi=\frac{\pi}{2}$

2° $(\pi)\ 3x-5y+z+1=0$ (p) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-1}$

$\vec{n}=(3,-5,1)$; $\vec{a}=(2,1,-1)$

$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$ što znači da su $\vec{a}$ i $\vec{n}$ normalni među sobom.

Proizilazi da je prava paralelna sa ravni.

Prava ne leži u ravni, jer tačka $A(1,-3,2)$ koja pripada pravoj, ne pripada ravni.

(To se proverava zamenom koordinata tačke u jednačinu ravni.)

Prava i ravan su paralelne i nemaju zajedničkih tačaka.

Odgovor:

a)---------------------------- Prava i ravan nemaju zajedničkih tačaka.

b)-- $\varphi=0$

3° $(\pi)\ x+2y+2z+1=0$ (p) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{1}$

$\vec{n}=(1,2,2)$; $\vec{a}=(1,0,1)$

$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}$; $\alpha=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}=\arccos\frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

$\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

Odgovor:

a)------------------------------- Prava prodire ravan u tački $P(1,-3,2)$.

b)-- $\varphi=\frac{\pi}{4}$

8.

M(3,1,4) ;

$(p_1)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{1}$ i $(p_2)\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-1}$

Da bi tražena ravan bila paralelna sa datim pravim mora njen normalni vektor $\vec{n}$ biti normalan na vektore pravca tih pravih $\vec{a_1}$ i $\vec{a_2}$. $\vec{n}\perp\vec{a_1}$; $\vec{n}\perp\vec{a_2}$

$$\vec{n}=\vec{a_1}\times\vec{a_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$$

$-2(x-3)+3(y-1)-4(z-4)=0$

Odgovor:----------------Jednačina ravni glasi $-2x+3y-4z+19=0$

IX OSOBINE FUNKCIJA

1. Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija :

1° $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 2° $y=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ 3° $y=\dfrac{1}{x^3+5x^2+6x}$

4° $y=\sqrt{5-x}+\dfrac{x+1}{x-2}$ 5° $y=\dfrac{2x+1}{x-2}+\ln(x+5)$

6° $y=\dfrac{x-4}{x}\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}\,\dfrac{x+1}{x-2}$ 7° $y=\ln\dfrac{2-x}{x-3}$

8° $y=\sqrt{\dfrac{x+4}{x^2-1}}$

2. Ispitati parnost i neparnost sledećih funkcija:

1° $y=x^6+5x^2+1$ 2° $y=x^3-x$ 3° $y=x^3+5x^2+1$

4° $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$ 5° $y=\dfrac{\cos x}{x^2}$ 6° $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 7° $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

3. Odrediti sledeće granične vrednosti:

1° $\lim\limits_{x\to1}(x^3+4x-2)=$ 2° $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+1}{3x-2}=$ 3° $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x}{x^2}=$

4° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=$ 5° $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+5}{(x-1)^2}=$ 6° $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5}{(x-2)^2}=$

4. Odrediti sledeće granične vrednosti oblika " $\dfrac{0}{0}$ " :

1° $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=$ 2° $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=$

3° $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}=$ 4° $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=$

5° $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$ 6° $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}=$

7° $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$ 8° $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{8}}{\sqrt[3]{x}-2}=$

5. Odrediti sledeće granične vrednosti oblika " $\dfrac{\infty}{\infty}$ " :

1° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-1}=$ 2° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+4x-1}{2x^3+x+3}=$

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{3x-1}=$ 4° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+2x+1}=$

5° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3+7x-1}{x^4+x^3+x}=$ 6° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{3x^2+x+5}=$

7° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2+x+1}=$ 8° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+x+5}{x-1}=$

9° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x-2}{x^2+x-1}=$ 10° $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+x+5}{x-1}=$

11° $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x-2}{x^2+x-1}=$ 12° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^3+x^2-7}}{\sqrt{x^2-x+3}}=$

13° $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^3+x^2-7}}{\sqrt{x^2-x+3}}=$ 14° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{x^3+x+1}}{\sqrt[5]{x^5-3x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}=$

6. Odrediti sledeće granične vrednosti oblika "$\infty-\infty$" :

1° $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1})=$ 2° $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x-3})=$

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=$ 4° $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=$

5° $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)=$

7. Koristeći da je $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, odrediti sledeće granične vrednosti

1° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=$ 2° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{3x}=$ 3° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{2x}=$ 4° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}=$

8. Koristeći da je $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$, odrediti sledeće granične vrednosti :

1° $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{5x})^{4x}=$ 2° $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}=$

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{3x+4}{3x-2})^x=$ 4° $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x+5})^x=$

REŠENJA :

1.

Kod određivanja oblasti definisanosti navedenih funkcija treba obratiti pažnju na sledeće:

- **deljenje nulom nije definisano**
- **kvadratni koren je definisan samo ako je potkorena veličina veća ili jednaka nuli**
- **logaritamska funkcija je definisana samo ako je izraz unutar logaritma strogo veći od nule**

1° $y=\dfrac{x+1}{x-2}$;

$$D=\{x|\ x-2\neq 0\ \}=\{x|\ x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\ \}$$

Odgovor:-------------------------------- $D=\{x|\ x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\ \}$

2° $y=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$

Odgovor:----------------------- $D=\{x|\ x\in(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(2,+\infty)\ \}$

3° $y=\dfrac{1}{x^3+5x^2+6x}$

$x^3+5x^2+6x=0$; $x(x^2+5x+6)=0$

Imenilac se anulira za $x_1=0\vee x_2=-3\vee x_3=-2$ pa funkcija za te vrednosti nije definisana.

Odgovor:--

$D=\{x|\ x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)\ \}$

4° $y=\sqrt{5-x}+\dfrac{x+1}{x-2}$;

$D=\{x|\ x-2\neq 0\wedge 5-x\geq 0\ \}=\{x|\ x\in(-\infty,2)\cup(2,5]\ \}$

Odgovor:----------------------------------- $D=\{x|\ x\in(-\infty,2)\cup(2,5]\ \}$

5° $y=\dfrac{2x+1}{x-2}+\ln(x+5)$

$D=\{x|\ x-2\neq 0\wedge x+5\rangle 0\ \}=\{x|\ x\in(-5,2)\cup(2,+\infty)\ \}$

Odgovor:---------------------------------- $D=\{x|\ x\in(-5,2)\cup(2,+\infty)\ \}$

6° $y=\dfrac{x-4}{x}\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}\dfrac{x+1}{x-2}$

Odgovor:--------------------------- $D=\{x|\ x\in[-3,0)\cup(0,2)\cup(2,5]\ \}$

7° $y=\ln\dfrac{2-x}{x-3}$

$$D=\left\{x\middle|\ x-3\neq 0\wedge\frac{2-x}{x-3}\rangle 0\ \right\}=\{x|\ x\in(2,3)\ \}$$

Odgovor:-- $D=\{x|\ x\in(2,3)\ \}$

8° $y=\sqrt{\dfrac{x+4}{x^2-1}}$

$$D=\left\{x\middle|x^2-1\neq 0\wedge\frac{x+4}{x^2-1}\geq 0\ \right\}=\{x|\ x\in[-4,-1)\cup(1,+\infty)\ \}$$

Odgovor:-------------------------------- $D=\{x|\ x\in[-4,-1)\cup(1,+\infty)\ \}$

2.

Funkcija je **parna** ako je $(\forall x\in D)(f(-x)=f(x))$.

Funkcija je **neparna** ako je $(\forall x\in D)(f(-x)=-f(x))$.

Ako je oblast definisanosti asimetrična, u odnosu na koordinatni početak, funkcija ne može biti ni parna ni neparna.

1° $y=x^6+5x^2+1$;

$f(-x)=(-x)^6+5(-x)^2+1=x^6+5x^2+1=f(x)$

Odgovor:---Funkcija je parna.

2° $y=x^3-x$; $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-f(x)$

Odgovor:-- Funkcija je neparna.

3° $y=x^3+5x^2+1$

Odgovor:---------------------------- Funkcija nije ni parna ni neparna.

4° $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$

Odgovor:-- Funkcija je neparna.

5° $y=\dfrac{\cos x}{x^2}$

Odgovor:--- Funkcija je parna.

6° $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

Odgovor:-- Funkcija je parna.

7° $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Odgovor:-- Funkcija je neparna.

3.

Ako je $x_0 \in D$ onda je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

1° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+4x-2)=3$

2° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{3x-2}=6$

3° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos x}{x^2}=\dfrac{-1}{\pi^2}$

4° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1$

5° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+5}{(x-1)^2}=+\infty$

6° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{(x-2)^2}=+\infty$

4.

Granične vrednosti oblika " $\dfrac{0}{0}$ " :

1° Odgovor:--

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)}{(x+2)}=\frac{3}{4}$$

2° Odgovor:--

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x+3)}=\frac{3}{4}$$

3° Odgovor:--

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)}{(x^2+x+1)}=-\frac{2}{3}$$

4° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=3$

5°

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

6° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}=\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$

7°

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}$$

Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\dfrac{3}{2}$

8° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{8}}{\sqrt[3]{x}-2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

5.

Prilikom nalaženja graničnih vrednosti oblika " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ", treba podeliti brojilac i imenilac izrazom x^n gde je **n najveći stepen x-a iz imenioca**.

Dalje se koristi da je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0$; $\alpha > 0$

1° Odgovor:----------- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{1}=1$

2° Odgovor:----------- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+4x-1}{2x^3+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(1+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=\dfrac{1}{2}$

3° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{3x-1}=\dfrac{2}{3}$

4° Odgovor:------- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-4}{x^3+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{0}{1}=0$

5° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3+7x-1}{x^4+x^3+x}=0$

6° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{3x^2+x+5}=0$

7° Odgovor:----------- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x+3}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=+\infty$

8° Odgovor:------------------------------------- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+x+5}{x-1}=-\infty$

9° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^2+x-1}=+\infty$

10° Odgovor:------------------------------------ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+x+5}{x-1}=+\infty$

11° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^2+x-1}=-\infty$

12°

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^3+x^2-7}}{\sqrt{x^2-x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^3+x^2-7}\ :x}{\sqrt{x^2-x+3}\ :x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{7}{x^3}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{5+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\sqrt[3]{5}$$

Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^3+x^2-7}}{\sqrt{x^2-x+3}}=\sqrt[3]{5}$

13° Uvodi se **smena t = -x** . Ako $x\to-\infty$ onda $t\to\infty$ i važi da je x = -t .

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^3+x^2-7}}{\sqrt{x^2-x+3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5(-t)^3+(-t)^2-7}}{\sqrt{(-t)^2-(-t)+3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt[3]{-5t^3+t^2-7}\ :t}{\sqrt{t^2+t+3}\ :t}$$

$$=\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$$

Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^3+x^2-7}}{\sqrt{x^2-x+3}}=-\sqrt[3]{5}$

14° Odgovor:---------------------- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{x^3+x+1}}{\sqrt[5]{x^5-3x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}=1$

6. Granične vrednosti oblika $"\infty-\infty"$ se, racionalisanjem brojioca, svode na granične vrednosti oblika $"\frac{\infty}{\infty}"$.

1°

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1})\cdot\frac{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+5)-(x+1)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\quad :\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1}\ :\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{5}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{5}{x}}}=\frac{0}{1+1}=0$$

Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1})=0$

2° Odgovor:------------------------- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x-3})=+\infty$

3° Odgovor:------------------------------------- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=0$

4° Odgovor:---------------------------------- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\frac{a}{2}$

5° Odgovor:-------------------------- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)=\frac{a+b}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

1° Odgovor:----------------- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

2° Uvodi se **smena t = 4x** .

Ako $x\to 0$ onda $t\to 0$ i važi da je $x=\frac{1}{4}t$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3\cdot\frac{1}{4}t}=\frac{4}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{4}{3}$$

Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\frac{4}{3}$

3° Odgovor:-------------------- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cos x}=\frac{1}{2}$

4° Odgovor:-------------------------------- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}=\frac{5}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

1° Uvodi se **smena t = 5x** .

Ako $x\to +\infty$ onda $t\to +\infty$ i važi da je $x=\frac{1}{5}t$.

$$\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{5x})^{4x}=\lim_{t\to +\infty}(1+\frac{1}{t})^{4\frac{1}{5}t}=\lim_{t\to +\infty}[\ (1+\frac{1}{t})^t\ ]^{\frac{4}{5}}=e^{\frac{4}{5}}$$

Odgovor:--- $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{5x})^{4x}=e^{\frac{4}{5}}$

2° Uvodi se **smena t =** $\frac{1}{x}$. Ako $x\to 0$ onda $t\to\infty$ i $x=\frac{1}{t}$.

Odgovor:---

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{3}{t})^{5t\cdot\frac{3}{3}}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{3}{t})^{5\cdot 3\cdot\frac{t}{3}}=\lim_{t\to\infty}[\ (1+\frac{3}{t})^{\frac{t}{3}}\ ]^{15}=e^{15}$$

3° Ovaj limes je oblika "1^∞" pa se pogodnim transformacijama može svesti na granične vrednosti koje imaju veze sa brojem e.

$$\lim_{x\to +\infty}(\frac{3x+4}{3x-2})^x=\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{3x+4}{3x-2}-1)^x=\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{6}{3x-2})^{x\frac{6}{3x-2}\frac{3x-2}{6}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}[\ (1+\frac{6}{3x-2})^{\frac{3x-2}{6}}\ ]^{\frac{6x}{3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{3x-2}}=e^2$$

Odgovor:--- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{3x+1}{3x-2})^x=e^2$

4° Odgovor:---

$$\lim_{x\to +\infty}(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+5})^x=\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{4x-4}{x^2-x+5})^x=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4x^2-4x}{x^2-x+5}}=e^4$$

X IZVODI

1. Odrediti prve izvode sledećih funkcija :

1° $y = x^6 + 5x^2 + 1$ 2° $y = \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3} - 2$ 3° $y = \sqrt{x} + \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^5}$

4° $y = \pi \sin x - 3\cos x + \pi$ 5° $y = e^x + 2^x - arctgx$

6° $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 7° $y = e^x \sin x + 2^x arctgx$

8° $y = \sin x(x^3 + 2x - 5)$ 9° $y = \frac{\sin x}{x^2}$ 10° $y = \frac{5x+1}{3x-2}$

11° $y = \frac{x-2}{3x^2 + x + 5}$ 12° $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

13° $y = \frac{\sin x}{x^3} + \ln x tgx$ 14° $y = \frac{(2x+3)\sin x}{x^2 + x + 1}$

15° $y = \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2 - 1}$ 16° $y = \sqrt{5x - 2}$

17° $y = \sin(7x^2 + x - 2)$ 18° $y = \ln(\cos x + 5x + \pi)$

19° $y = e^{4x-2} + 2^{3x+5} - arctg(5x+1)$ 20° $y = \ln(x + \sqrt{x+3})$

21° $y = \sqrt{(x^2 + x - 3)\sin x}$ 22° $y = \frac{\sqrt{x+2}\cos(2x-1)}{\ln(x^2+1)}$

2. Odrediti logaritamske izvode sledećih funkcija :

1° $y = x^x$ 2° $y = (\sin x)^{3x}$ 3° $y = (tgx)^{\cos x}$

3. Odrediti druge izvode sledećih funkcija :

1° $y = x^5 + 5x^3 + x - 1$ 2° $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$ 3° $y = \sin x\sqrt{x}$

4° $y = \frac{\sin x}{x^2}$ 5° $y = \frac{5x+1}{3x-2}$ 6° $y = \frac{x-2}{3x^2 + x + 5}$

4. Odrediti n-te izvode sledećih funkcija :

1° $y = x^n$ 2° $y = \frac{1}{x}$ 3° $y = \sin x$

4° $y = \ln x$ 5° $y = e^{3x}$

REŠENJA:

Prilikom nalaženja prvih izvoda navedenih funkcija koriste se tablica izvoda elementarnih funkcija i osnovna pravila za nalaženje izvoda.

Tablica izvoda elementarnih funkcija:

$(c)' = 0$

$(x^n)' = nx^{n-1}$; $x > 0$; $n \in R$

$(a^x)' = a^x \ln a$; $a > 0 ; a \neq 1$; $x \in R$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $a > 0 ; a \neq 1$; $x > 0 ; x \in R$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $x > 0 ; x \in R$

$(\sin x)' = \cos x$; $x \in R$

$(\cos x)' = -\sin x$; $x \in R$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in Z$

$(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$; $x \neq k\pi$; $k \in Z$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $|x| < 1$; $x \in R$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $|x| < 1$; $x \in R$

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in R$

$(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$; $x \in R$

Osnovna pravila za nalaženje izvoda funkcija:

$(Cu)' = Cu' \quad ; C \in R$

$(C_1u + C_2v)' = C_1u' + C_2v' \qquad u = u(x); \quad v = v(x);$

$(u \cdot v)' = u'v + v'u$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$y'_x = y'_t \cdot t'_x$ *Izvod složene funkcije;* $\quad y = y(t(x)) \quad t = t(x)$

1.

1° $y = x^6 + 5x^2 + 1$;

Odgovor:-- $y' = 6x^5 + 10x$

2° $y = \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3} - 2$;

Odgovor:-- $y' = \frac{-3}{x^2} - \frac{15}{x^4}$

3° $y = \sqrt{x} + \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^5}$;

Odgovor:-- $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^5}} - \frac{5}{x^6}$

4° $y = \pi \sin x - 3\cos x + \pi$;

Odgovor:-- $y' = \pi \cos x + 3\sin x$

5° $y = e^x + 2^x - arctgx$;

Odgovor:-- $y' = e^x + 2^x \ln 2 - \frac{1}{1+x^2}$

6° $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; Funkcija se može napisati u obliku

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + \left(\frac{1}{e}\right)^x\right)$$

Odgovor:--------------------------- $y' = \frac{1}{2}\left(e^x + \left(\frac{1}{e}\right)^x \ln\frac{1}{e}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

7° $y = e^x \sin x + 2^x arctgx$

Odgovor:---------- $y' = e^x \sin x + \cos x e^x + 2^x \ln 2 arctgx + \frac{1}{1+x^2} 2^x$

8° $y = \sin x(x^3 + 2x - 5)$

Odgovor:---------------------- $y' = \cos x(x^3 + 2x - 5) + (3x^2 + 2)\sin x$

9° $y = \frac{\sin x}{x^2}$;

Odgovor:-- $y' = \frac{\cos x \cdot x^2 - 2x\sin x}{x^4}$

10° $y = \frac{5x+1}{3x-2}$;

Odgovor:-------------------------- $y' = \frac{5(3x-2) - 3(5x+1)}{(3x-2)^2} = \frac{-13}{(3x-2)^2}$

11° $y = \frac{x-2}{3x^2 + x + 5}$;

Odgovor:-- $y' = \frac{-3x^2 - 12x + 7}{(3x^2 + x + 5)^2}$

12° $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$;

Odgovor:------------------------------ $y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{x} - 1\right) - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^2}$

13° $y = \frac{\sin x}{x^3} + \ln x tgx$;

Odgovor:-------------- $y' = \frac{\cos x \cdot x^3 - 3x^2 \sin x}{x^6} + \frac{1}{x} tgx + \frac{1}{\cos^2 x} \ln x$

14°

$y = \frac{(2x+3)\sin x}{x^2 + x + 1}$; $u = (2x+3)\sin x$; $\quad u' = 2\sin x + \cos x(2x+3)$;

$v = x^2 + x + 1 \quad ; \quad v' = 2x + 1$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(2\sin x + \cos x(2x+3)) \cdot (x^2 + x + 1) - (2x+1) \cdot (2x+3)\sin x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Odgovor:------- $y' = \frac{\sin x(-2x^2 - 6x - 1) + \cos x(2x^3 + 5x^2 + 5x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2}$

15° $y=\frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2-1}$;

Odgovor:---------- $y'=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sin x\sqrt{x}\right)(x^2-1)-2x\sqrt{x}\cos x}{(x^2-1)^2}$

16° $y=\sqrt{5x-2}$; $y=\sqrt{t}$
smena $t=5x-2$; $t'=5$;

Odgovor:------------------------------------ $y'=\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot t'=\frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$

17° $y=\sin(7x^2+x-2)$;

Odgovor:------------------------------- $y'=\cos(7x^2+x-2)(14x+1)$

18° $y=\ln(\cos x+5x+\pi)$;

Odgovor:--- $y'=\frac{-\sin x+5}{\cos x+5x+\pi}$

19° $y=e^{4x-2}+2^{3x+5}-arctg(5x+1)$

Odgovor:-------------------- $y'=4e^{4x-2}+3\ln 2\cdot 2^{3x+5}-\frac{5}{1+(5x+1)^2}$

20° $y=\ln(x+\sqrt{x+3})$;

Odgovor:------------------------- $y'=\frac{1}{x+\sqrt{x+3}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)$

21° $y=\sqrt{(x^2+x-3)\sin x}$

Odgovor:------------------------

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{(x^2+x-3)\sin x}}\left[(2x+1)\sin x+\cos x(x^2+x-3)\right]$$

22°

$y=\frac{\sqrt{x+2}\cos(2x-1)}{\ln(x^2+1)}$; $u=\sqrt{x+2}\cos(2x-1)$;

$u'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\cos(2x-1)-2\sin(2x-1)\sqrt{x+2}$

$v=\ln(x^2+1)$; $v'=\frac{2x}{x^2+1}$

Odgovor:--

$$y'=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\cos(2x-1)-2\sin(2x-1)\sqrt{x+2}\right)\ln(x^2+1)-\frac{2x}{x^2+1}\sqrt{x+2}\cos(2x-1)}{\left(\ln(x^2+1)\right)^2}$$

2.

1° $y=x^x$

Logaritmovanjem jednakosti kojom je zadata funkcija dobija se:

$\ln y=\ln(x^x)$; $\ln y=x\ln x$

$(\ln y)'=(x\ln x)'$; $\frac{1}{y}y'=1\cdot\ln x+\frac{1}{x}x$; $y'=y(\ln x+1)$

Odgovor:-- $y'=x^x(\ln x+1)$

2° $y=(\sin x)^{3x}$;

Odgovor:------------------------------ $y'=(\sin x)^{3x}3(\ln\sin x+xctgx)$

3° $y=(tgx)^{\cos x}$;

Odgovor:---------------------- $y'=(tgx)^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln tgx+\frac{1}{\cos x}\right)$

3.

Drugi izvod funkcije je funkcija koja predstavlja izvod prvog izvoda. $y''=(y')'$

1° $y=x^5+5x^3+x-1$; $y'=5x^4+15x^2+1$;
$y''=(5x^4+15x^2+1)'$

Odgovor:-- $y''=20x^3+30x$

2° $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}$;

Odgovor:-- $y''=\frac{2}{x^3}+24\frac{1}{x^5}$

3° $y=\sin x\sqrt{x}$; $y'=\cos x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x$

Odgovor:--

$$y''=-\sin x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\sin x+\cos x\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

4° $y=\frac{\sin x}{x^2}$; $y'=\frac{\cos x\cdot x^2-2x\sin x}{x^4}=\frac{u}{v}$;

$u'=-\sin x\left(x^2+2\right)$; $v'=4x^3$

Odgovor:--

$$y''=\frac{\left(-\sin x\left(x^2+2\right)\right)\cdot x^4-4x^3\left(\cos x\cdot x^2-2x\sin x\right)}{x^8}$$

5° $y=\frac{5x+1}{3x-2}$; $y'=\frac{-13}{(3x-2)^2}$

Odgovor:-- $y''=\frac{78}{(3x-2)^3}$

6° $y=\frac{x-2}{3x^2+x+5}$; $y'=\frac{-3x^2-12x+7}{\left(3x^2+x+5\right)^2}=\frac{u}{v}$;

$u'=-6(x+2)$;

$v'=2\left(3x^2+x+5\right)(6x+1)$

Odgovor:----------

$$y''=\frac{-6(x+2)\left(3x^2+x+5\right)^2-2\left(3x^2+x+5\right)(6x+1)\left(-3x^2-12x+7\right)}{\left(3x^2+x+5\right)^4}$$

Napomena : U zadacima u kojima se ispituje poznavanje nalaženja izvoda nije neophodno sređivanje krajnjeg izraza.

(Odgovor:------------------------------- $y''=\frac{-9x^3-54x^2+51x+37}{\left(3x^2+x+5\right)^4}$)

4. **n**-ti izvod funkcije je funkcija koja se dobija kao izvod **n-1**-og izvoda. $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$

1° $y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$; $y''=n(n-1)x^{n-2}$; $y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$; $y^{(4)}=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4};\cdots$

Odgovor:--------------- $y^{(n)}=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\cdots3\cdot2\cdot1=n!$

2° $y=\frac{1}{x}$;

Odgovor:-- $y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

3° $y=\sin x$;

Odgovor:--- $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

4° $y=\ln x$;

Odgovor:--- $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

5° $y=e^{3x}$;

Odgovor:-- $y^{(n)}=3^n e^{3x}$

XI PRIMENA IZVODA

1. Odrediti jednačine tangenti grafika funkcija, u tačkama preseka sa x- osom.

1° $y = x^2 - 5x$ 2° $y = \ln x$ 3° $y = e^{x^2-4} - 1$

2. Primenom Lopitalove teoreme odrediti sledeće granične vrednosti :

1° $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-1} =$ 2° $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1} =$; $m \neq 0$

3° $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} =$ 4° $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^m} =$; $m \rangle 0$

5° $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x-1} =$ 6° $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} =$

7° $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x - arctgx}{x^3} =$ 8° $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x} =$ 9° $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{1-x}} =$

3. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

1° $y = x^3 - 3x$;   2° $y = x^3 - 2x^2 + x$;   3° $y = \dfrac{5x+1}{3x-2}$;

4° $y = \dfrac{x+1}{1-2x}$;   5° $y = \dfrac{x-3}{x^2}$;   6° $y = \dfrac{x^2-2}{x^2-1}$;

7° $y = \dfrac{x^2+1}{2-x^2}$;   8° $y = \dfrac{x^3-x^2}{x+2}$;   9° $y = \dfrac{2x^2+x+5}{x-1}$;

10° $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$;   11° $y = \dfrac{x^2-x-2}{x-3}$;   12° $y = \dfrac{-x^2-2x+3}{x-2}$;

13° $y = \dfrac{x^2}{x-2}$;   14° $y = \dfrac{x^2-9}{x-2}$;   15° $y = (x+2)\sqrt{5-x}$;

16° $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$;   17° $y = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+4}}$;   18° $y = (x+2)^2 e^x$;

19° $y = x^2 e^{-x}$;   20° $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;   21° $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

22° $y = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$;   23° $y = (x+2)^2 \ln x$;   24° $y = |\ln(x-3)|$;

REŠENJA :

1.

Jednačina tangente grafika funkcija $y = f(x)$ u tački $A(x_0, y_0)$, koja pripada grafiku, $y_0 = f(x_0)$, glasi :

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Tačka preseka grafika sa x- osom, nula funkcije, ima koordinate $A(x_0, 0)$.

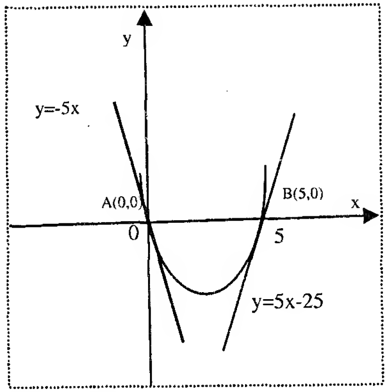
1° $y = x^2 - 5x$; $x^2 - 5x = 0$; $x_1 = 0 \vee x_2 = 5$

Tačke preseka grafika sa x- osom, imaju koordinate $A(0, 0)$ i $B(5, 0)$.

$y' = 2x - 5$; $f'(0) = -5$; $f'(5) = 5$

(t_1) $A(0, 0)$ $y - 0 = f'(0)(x - 0)$ $y = -5x$

(t_2) $B(5, 0)$ $y - 0 = f'(5)(x - 5)$ $y = 5(x-5)$; $y = 5x - 25$



Odgovor: ------------------------------- (t_1) $y = -5x$; (t_2) $y = 5x - 25$

2° $y = \ln x$; $\ln x = 0$; $x = 1$

Tačka preseka grafika sa x- osom, ima koordinate $A(1, 0)$.

$y' = \dfrac{1}{x}$; $f'(1) = 1$; $A(1, 0)$

(t_1) $y - 0 = f'(1)(x - 1)$; $y = x - 1$

Odgovor: -- (t_1) y x

3° $y=e^{x^2-4}-1$;

$y=0$; $e^{x^2-4}-1=0$; $e^{x^2-4}=1$; $x^2-4=0$

Tačke preseka grafika sa x- osom, imaju koordinate $A(-2,0)$ i $B(2,0)$.

$y'=2xe^{x^2-4}$; $f'(-2)=-4$; $f'(2)=4$;

(t_1) $A(-2,0)$ $y-0=f'(-2)(x+2)$ $y=-4x-8$

(t_2) $B(2,0)$ $y-0=f'(2)(x-2)$

$y=4(x-2)$; $y=4x-8$

Odgovor: ---------------------------- (t_1) $y=-4x-8$; (t_2) $y=4x-8$

2.

Lopitalova teorema (L'Hospital 1661-1704) ili **Lopitalovo pravilo** se primenjuje prilikom određivanja graničnih vrednosti oblika " $\frac{0}{0}$ " ili " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (ili $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=+\infty$)

i postoji $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ onda je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Teorema važi i kada je $a=+\infty$ ili $a=-\infty$

1° Odgovor:--

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x-2)'}{(x^2+x-1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)'}{(2x+1)'}=\frac{2}{2}=1$$

2° Odgovor:--

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^n-1)'}{(x^m-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{nx^{n-1}}{mx^{m-1}}=\frac{n}{m}$$

3° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{3}{2}$

4° Odgovor:---- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^m)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{mx^{m-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{mx^m}=0$

5° Odgovor:------------------- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$

6° Odgovor:--

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{2(x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

7° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}=0$

8° Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$

9° $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{1-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{1-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x3}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\ln x}{1-x}}=e^0=1$;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\ln x}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{1}{x}}{-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{x}=0$$

Odgovor:-- $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{1-x}}=1$

Opšti postupak ispitivanja toka i skiciranja grafika funkcije $y = f(x)$, koja je zadata analitički, može se predstaviti na sledeći način:

I Na osnovu definicione jednakosti $y = f(x)$ kojom se zadaje funkcija, određuje se

1) Oblast definisanosti funkcije
2) Parnost, neparnost
3) Periodičnost
4) Ponašanje funkcije na krajevima intervala definisanosti
5) Određivanje asimptota
6) Nule funkcije ($y = 0$) –tačke preseka sa x-osom
7) Znak funkcije
–određivanje intervala iz D gde je funkcija pozitivna ($y > 0$)
i gde je funkcija negativna ($y < 0$)

I I Na osnovu izračunatog prvog izvoda funkcije $y' = f'(x)$ određuju se:

1) Intervali monotonosti $y' > 0$ *raste*; $y' < 0$ *opada*

2) $y' = 0$ - **potencijalne** ekstremne vrednosti

3) Ekstremne vrednosti

I I I Na osnovu izračunatog drugog izvoda funkcije $y'' = f''(x)$ određuju se:

1) Intervali konveksnosti $(\cup)$ **i konkavnosti** $(\cap)$

$y'' > 0$ *konveksna* $\cup$

$y'' < 0$ *konkavna* $\cap$

2) $y'' = 0$ - **potencijalne** prevojne tačke

3) Prevojne tačke

I V Skiciranje grafika

Za skiciranje grafika moraju se uzeti u obzir sve ispitane stavke i njihova geometrijska interpretacija.
Zgodno je odrediti i nekoliko dopunskih, karakterističnih tačaka grafika funkcije $(x_0, f(x_0))$.
Na primer,
tačka preseka sa y-osom koja se dobija za $x = 0$ $(0, f(0))$;
lokalne ekstremume $(x_{\min}, f(x_{\min}))$, $(x_{\max}, f(x_{\max}))$,
prevojne tačke $(x_{prev}, f(x_{prev}))$...

1° $y = x^3 - 3x$;

D=R ; Polinomna funkcija je uvek definisana.

Funkcija je **neparna** jer važi:

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$

To znači da će imati grafik koji je centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.

$f(x)$ **nije periodična**.

Funkcija **nema asimptote** jer je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Funkcija se može predstaviti izrazom $y = x(x^2 - 3)$.

Nule

$y = 0$; $x(x^2 - 3) = 0$; $x_1 = -\sqrt{3} \vee x_2 = 0 \vee x_3 = \sqrt{3}$

Funkcija ima tri nule $x_1 = -\sqrt{3} \vee x_2 = 0 \vee x_3 = \sqrt{3}$ i tu grafik seče x-osu.

Znak funkcije se dobija rešavanjem nejednačina :

$x(x^2 - 3) > 0$ i $x(x^2 - 3) < 0$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
x	- - - -	- - - - - - -	+ + + + + + + +	+ + + +
$x^2 - 3$	+ + +	- - - - - - -	- - - - - - - -	+ + +
$y = x(x^2 - 3)$	- - - - -	+ + + + + +	- - - - - -	+ + +

$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$

znak + $y > 0$ $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

znak - $y < 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

Prvi izvod $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 3(x^2 - 1)$

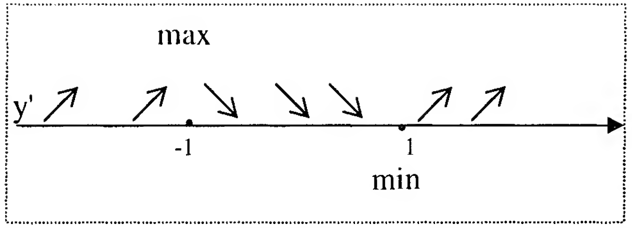
Monotonost

$y' > 0$ rastuća na intervalima $(-\infty, -1)$ *i* $(1, +\infty)$

$y' < 0$ opadajuća na intervalu $(-1, 1)$

$y' = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x_1 = -1 \vee x_2 = 1$

to su **potencijalne** ekstremne vredosti



Za $x_1 = -1$ funkcija dostiže lokalni maksimum, jer tada y' menja znak $(+\ pa\ -)$, tj. tada prelazi iz rašćenja u opadanje.
Za $x_2 = 1$ funkcija dostiže lokalni minimum, jer tada y' menja znak $(-\ pa\ +)$, tj. tada prelazi iz opadanja u rašćenje .

Drugi izvod $y'' = 6x$;

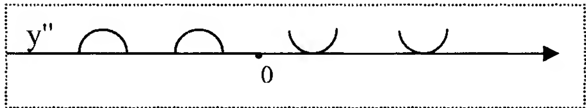
Intervali konveksnosti i konkavnosti

$y'' > 0$ $\quad konveksna \cup$ $\quad ; x > 0$

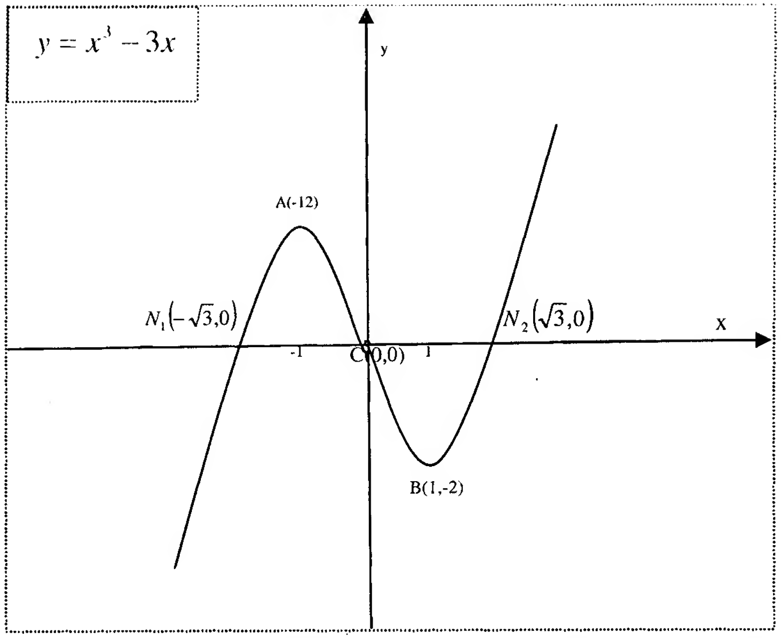
$y'' < 0$ $\quad konkavna \cap$ $\quad ; x < 0$

$y'' = 0$; $x = 0$ **potencijalna** prevojna tačka

Za $x = 0$ funkcija ima prevojnu tačku, jer tada y'' menja znak $(-\ pa\ +)$, tj. tada prelazi iz konkavnosti u konveksnost .



Za skiciranje grafika uzima se u obzir sve prethodno ispitano i određuje se nekoliko tačaka grafika funkcije $(x_0, f(x_0))$.
tačke preseka sa x-osom $N_1(-\sqrt{3},0)$; $N_2(\sqrt{3},0)$; $C(0,0)$
tačka preseka sa y-osom koja se dobija za $x = 0$ $\quad C(0,0)$
tačka grafika koja se dobija za $x_{\max} = -1$ $\quad A(-1,2)$
tačka grafika koja se dobija za $x_{\min} = 1$ $\quad B(1,-2)$
$x_{prev} = 0$; prevojna tačka, ove funkcije, poklapa se sa $C(0,0)$
Grafik funkcije je centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.



2° $y = x^3 - 2x^2 + x$; $\quad y = x(x-1)^2$

D=R ;

Funkcija $f(x)$ **nije periodična, nije parna, nije neparna.**:
$f(x)$ **nema asimptote** jer je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Funkcija se može predstaviti izrazom $y = x(x-1)^2$.

Nule

$y = 0$; $x(x-1) = 0$; $x_1 = 0 \ \vee\ x_2 = x_3 = 1$

Funkcija ima dve nule $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ i tu grafik seče x-osu. $x_2 = 1$ je dvostruka nula.

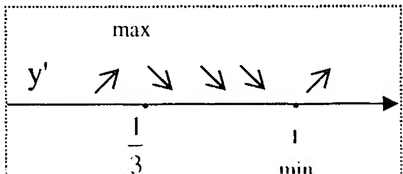
Znak funkcije :

znak **+** $\ y > 0$ $\quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ -------tu je grafik iznad x-ose

znak **-** $\ y < 0$ $\quad x \in (-\infty,0)$ -------------tu je grafik ispod x-ose

Prvi izvod $y' = 3x^2 - 4x + 1$; $\quad y' = (x-1)(3x-1)$;

Monotonost



$y'>0$ rastuća na intervalima $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ i $(1,+\infty)$

$y'<0$ opadajuća na intervalu $\left(\frac{1}{3},1\right)$

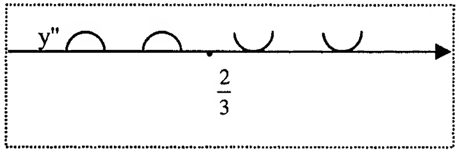
$y'=0$; $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$; $x_{\max}=\frac{1}{3}$; $x_{\min}=1$

Drugi izvod $y''=6x-4$

Intervali konveksnosti i konkavnosti

$y''>0$ *konveksna* $\cup$; $x>\frac{2}{3}$

$y''<0$ *konkavna* $\cap$; $x<\frac{2}{3}$



$y''=0$; $x=\frac{2}{3}$ **potencijalna** prevojna tačka

Za $x=\frac{2}{3}$ funkcija ima prevojnu tačku .

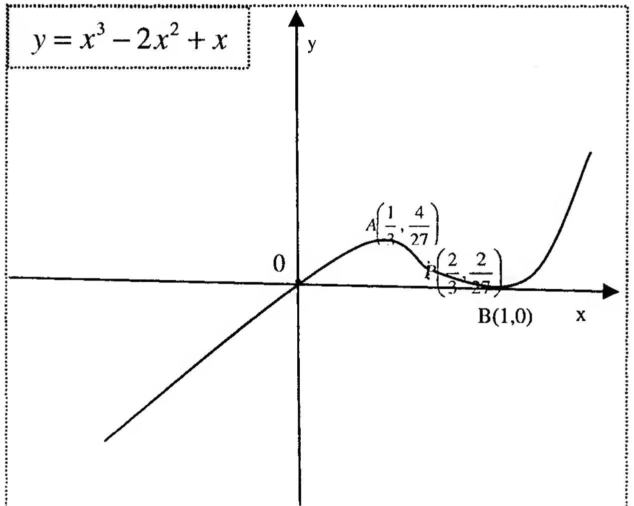
tačke preseka sa x-osom $N_1(0,0)$; $N_2(1,0)$;

tačka preseka sa y-osom koja se dobija za $x=0$; $C(0,0)$

tačka grafika koja se dobija za $x_{\max}=\frac{1}{3}$; $A\left(\frac{1}{3},\frac{4}{27}\right)$

tačka grafika koja se dobija za $x_{\min}=1$; $B(1,0)$

$x_{prev}=\frac{2}{3}$; prevojna tačka $P\left(\frac{2}{3},\frac{2}{27}\right)$



3° $y=\frac{5x+1}{3x-2}$;

$D=\{x|3x-2\neq 0\}=\left\{x\,\middle|\,x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)\right\}$

Funkcija $f(x)$ **nije periodična, nije parna, nije neparna.**

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{5}{3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{5}{3}$

$f(x)$ ima **horizontalnu asimptotu** $y=\frac{5}{3}$;

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}-\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to\frac{2}{3}-\varepsilon}\frac{5x+1}{3x-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{5\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)+1}{3\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)-2}=-\infty \quad ;\varepsilon>0$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}+\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to\frac{2}{3}+\varepsilon}\frac{5x+1}{3x-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{5\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\right)+1}{3\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\right)-2}=\infty \quad ;\varepsilon>0$$

$f(x)$ ima **vertikalnu asimptotu** čija je jednačina $x=\frac{2}{3}$.

Funkcija nema kosu asimptotu.

Nule

$y=0$; $x=-\frac{1}{5}$ Funkcija ima jednu nulu i tu grafik seče x-osu..

Znak funkcije se dobija rešavanjem nejednačina :

$\frac{5x+1}{3x-2}>0$ i $\frac{5x+1}{3x-2}<0$

$5x+1$	- - - - -	+++ ++++	+++
$3x-2$	- - - - -	- - - - - - - - -	+++++
$y=\frac{5x+1}{3x-2}$	++++	- - - - - - -	+++++
		$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$

Znak funkcije :

znak **+ ;** $y>0$ $\quad x\in\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ tu je grafik iznad x-ose

znak **- ;** $y<0$ $\quad x\in\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$--------------tu je grafik ispod x-ose

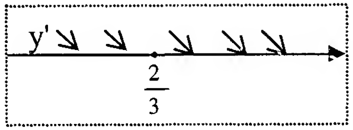
Prvi izvod $\quad y'=\dfrac{-13}{(3x-2)^2}$;

Monotonost

$y'>0$ nikada

$y'<0$ u celoj oblasti definisanosti

$y'=0$ nikada



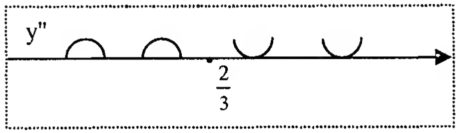
Nema ekstremne vredosti.

Drugi izvod $\quad y''=\dfrac{78}{(3x-2)^3}$

Intervali konveksnosti i konkavnosti

$y''>0$ *konveksna* $\cup$ $\quad ;x>\frac{2}{3}$

$y''<0$ *konkavna* $\cap$ $\quad ;x<\frac{2}{3}$

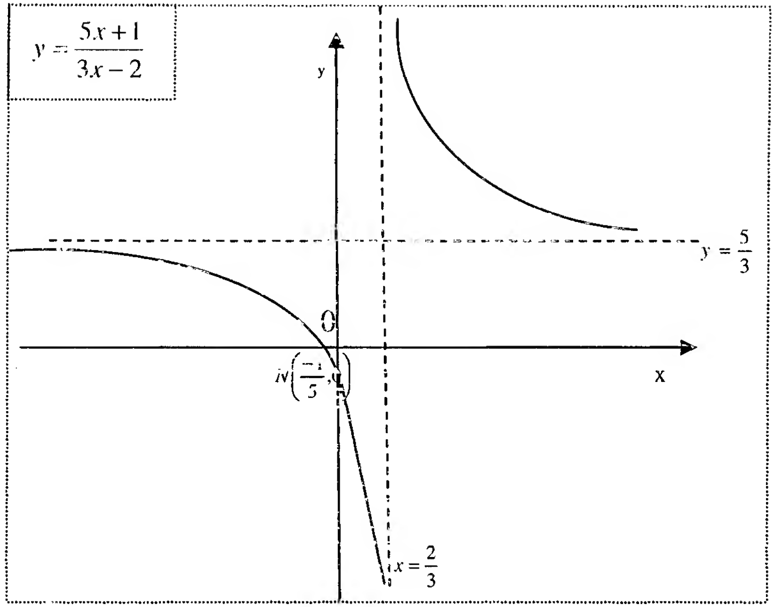


$y''=0$; nikada

Za $x=\frac{2}{3}$ funkcija nema prevojnu tačku jer tu nije definisana.

tačka preseka sa x-osom ; $N\left(-\frac{1}{5},0\right)$

tačka preseka sa y-osom koja se dobija za $x=0$; $C\left(0,-\frac{1}{2}\right)$



6° $\quad y=\dfrac{x^2-2}{x^2-1}$;

Oblast definisanosti:

Funkcija je definisana kada je imenilac različit od 0.

$D=\{x|x^2-1\neq 0\}=\{x|x\neq -1\wedge x\neq 1\}=\{x|x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)\}$

Funkcija $f(x)$ **nije periodična.**

Funkcija je **parna** jer važi:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-2}{(-x)^2-1}=\frac{x^2-2}{x^2-1}=f(x)$$

To znači da je grafik funkcije simetričan u odnosu na y-osu.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ $\quad ; \quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

$f(x)$ **ima horizontalnu asimptotu** $y=1$;

$$\lim_{x\to 1-\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to 1-\varepsilon}\frac{x^2-2}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1-\varepsilon)^2-2}{(1-\varepsilon)^2-1}=+\infty \quad ;\varepsilon\rangle 0$$

$$\lim_{x\to 1+\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to 1+\varepsilon}\frac{x^2-2}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^2-2}{(1+\varepsilon)^2-1}=-\infty \quad ;\varepsilon\rangle 0$$

$$\lim_{x\to 1-\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to 1+\varepsilon} f(x)=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to -1+\varepsilon} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-\varepsilon} f(x)=+\infty$

Poslednja dva limesa se dobijaju direktno zbog parnosti funkcije.
Funkcija ima **dve vertikalne asimptote** čije su jednačine
$x=-1$ i $x=1$.
Nema kosu asimptotu.

Nule

$y=0$; $x^2-2=0$; $x_1=-\sqrt{2}$ $\vee$ $x_2=\sqrt{2}$

Funkcija ima dve nule i tu grafik seče x-osu.
Znak funkcije se dobija rešavanjem nejednačina :

$\frac{x^2-2}{x^2-1}\rangle 0$ i $\frac{x^2-2}{x^2-1}\langle 0$

x^2-2	+ + + +	- -	- - - - - - - -	- -	+ + + +
x^2-1	+ + + +	+ +	- - - - - -	+ +	+ + + +
$y=\frac{x^2-2}{x^2-1}$	+ + + +	- -	+ + + + +	- -	+ + + +
	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	

znak **+** $y\rangle 0$ $x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup(-1,1)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

znak **-** $y\langle 0$ $x\in\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$

Prvi izvod $y'=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$;

Monotonost

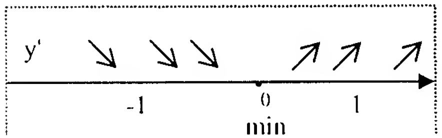
Nule i znak prvog izvoda zavise od funkcije u brojiocu jer je imenilac uvek pozitivan u D.

$y'\rangle 0$ rastuća na intervalima $(0,1)$ i $(1,+\infty)$

$y'\langle 0$ opadajuća na intervalima $(-\infty,-1)$ i $(-1,0)$

$y'=0$; $2x=0$; $x=0$ to je **potencijalna** ekstremna vrednost

Za $x_{min}=0$ funkcija dostiže lokalni minimum, jer tada y' menja znak ($-$ *pa* $+$).



Drugi izvod $y''=\left(\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{-2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$;

Intervali konveksnosti i konkavnosti

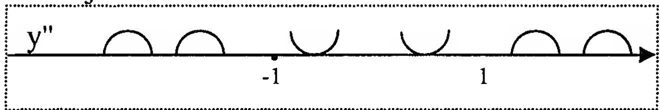
$y''\rangle 0$ *konveksna* $\cup$; $x^2-1\langle 0$

$y''\langle 0$ *konkavna* $\cap$; $x^2-1\rangle 0$

$y''=0$ ni za jedno x

Za $x_1=-1$, $x_2=1$ y'' menja znak

To nisu prevojne tačke jer ove vrednosti nisu u oblasti definisanosti funkcije.

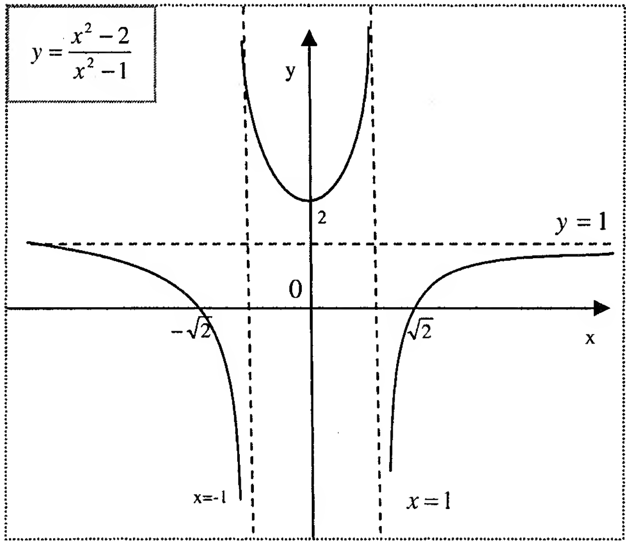


Za skiciranje grafika uzima se u obzir sve prethodno ispitano i određuje se nekoliko tačaka grafika funkcije $(x_0, f(x_0))$.

tačke preseka sa x-osom $N_1\left(-\sqrt{2},0\right)$; $N_2\left(\sqrt{2},0\right)$;

tačka preseka sa y-osom $x=0$ $C(0,2)$

tačka grafika koja se dobija za $x_{min}=0$; $C(0,2)$



10° $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$

Oblast definisanosti:

Funkcija je definisana kada je imenilac različit od 0.

$D=\{x \mid x-3\neq 0\}=\{x \mid x\neq 3\}=\{x \mid x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)\}$

Parnost, neparnost, periodičnost :

Funkcija nije parna, nije neparna, a nije ni periodična jer ima asimetričnu oblast definisanosti.

Ponašanje funkcije na krajevima intervala definisanosti i asimptote :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1-2\frac{1}{x}}{1-3\frac{1}{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1-2\frac{1}{x}}{1-3\frac{1}{x}}=\infty$$

Pošto su ovi limesi beskonačni funkcija **nema horizontalnu asimptotu**.

$$\lim_{x\to3-\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to3-\varepsilon}\frac{x^2-x-2}{x-3}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{(3-\varepsilon)^2-(3-\varepsilon)-2}{(3-\varepsilon)-3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to3+\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to3+\varepsilon}\frac{x^2-x-2}{x-3}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{(3+\varepsilon)^2-(3+\varepsilon)-2}{(3+\varepsilon)-3}=\infty$$

Funkcija **ima vertikalnu asimptotu** čija je jednačina $x=3$.

Da bi ispitali postojanje kose asimptote potrebno je naći granične vrednosti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-x-2}{x-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x}=1=k$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x-2}{x-3}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{x-3}=2=n$$

Funkcija **ima kosu asimptotu** čija je jednačina $y=x+2$

$(y=kx+n)$

VEŽBE

Nule

$y=0$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1 \vee x_2=2$

Funkcija ima dve nule $x_1=-1$, $x_2=0$.

Znak funkcije se dobija rešavanjem nejednačina :

$\dfrac{x^2-x-2}{x-3}>0$ i $\dfrac{x^2-x-2}{x-3}<0$

znak + $\quad y>0 \quad x\in(-1,2)\cup(3,+\infty)$

znak - $\quad y<0 \quad x\in(-\infty,-1)\cup(2,3)$

		-1	2	3	
x^2-x-2	+++	- - - - - - - - -	+++	+++++
$x-3$	- - - - -	- - - - - - - - - -	- - -	+++++
$y=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$	- - - - - -	++++++++	- - - -	+++++

Prvi izvod $\quad y'=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$;

Monotonost

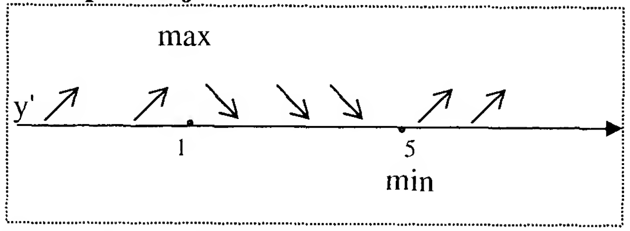
Nule i znak prvog izvoda isti su kao kod kvadratne funkcije $y=x^2-6x+5$ jer je imenilac uvek pozitivan u D.

$y'>0$ rastuća na intervalima $(-\infty,1)$ *i* $(5,+\infty)$

$y'<0$ opadajuća na intervalu $(1,5)$

$y'=0$; $x^2-6x+5=0$; $x_1=1 \vee x_2=5$

to su **potencijalne** ekstremne vrednosti



Za $x_1=1$ funkcija dostiže lokalni maksimum, jer tada y' menja znak (+ *pa* −).

Za $x_2=5$ funkcija dostiže lokalni minimum, jer tada y' menja znak (− *pa* +).

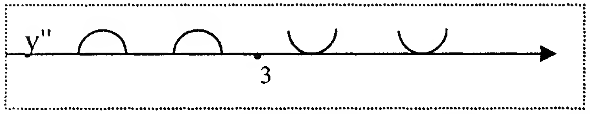
Drugi izvod $y''=\left(\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)'=\dfrac{8}{(x-3)^3}$;

Intervali konveksnosti i konkavnosti

$y''>0$ *konveksna* $\cup$; $x\in(3,+\infty)$

$y''<0$ *konkavna* $\cap$; $x\in(-\infty,3)$

$y''=0$ ni za jedno x



Za $x=3$ y'' menja znak ($-$ *pa* $+$), tj. tada prelazi iz konkavnosti u konveksnost

Funkcija nema prevojnu tačku jer x=3 nije u oblasti definisanosti .

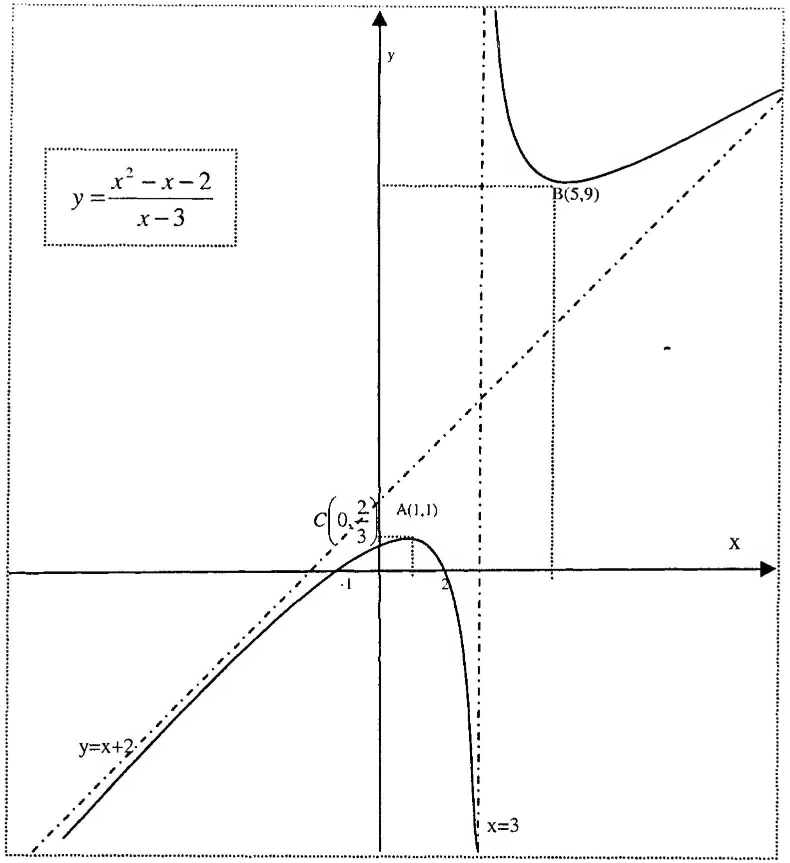
Za skiciranje grafika uzima se u obzir sve prethodno ispitano i određuje se nekoliko tačaka grafika funkcije $(x_0, f(x_0))$.

tačke preseka sa x-osom $N_1(-1,0)$; $N_2(2,0)$;

tačka preseka sa y-osom $x=0$ $C\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$

tačka grafika koja se dobija za $x_{max}=1$ $A(1,1)$

tačka grafika koja se dobija za $x_{min}=5$ $B(5,9)$



15° $y=(x+2)\sqrt{5-x}$;

$D=\{x|5-x\ge 0\}=\{x|x\in(-\infty,5]\}$

Funkcija $f(x)$ **nije periodična, nije parna, nije neparna.**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f(x)$ nema **horizontalnu asimptotu .**

$f(x)$ nema **vertikalnu asimptotu.**

Funkcija nema **kosu asimptotu** jer je

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+2)\sqrt{5-x}}{x}=+\infty$.

Nule

$y=0$; $(x+2)\sqrt{5-x}=0$; $x_1=-2\vee x_2=5$

Funkcija ima dve nule i tu grafik seče x-osu.

Znak funkcije se dobija rešavanjem nejednačina :
$x+2 \rangle 0$ i $x+2 \langle 0$ jer je $\sqrt{5-x} \geq 0$ u celoj oblasti definisanosti.

znak + $\quad y \rangle 0 \quad x \in (-2,5)$

znak - $\quad y \langle 0 \quad x \in (-\infty,-2)$

Prvi izvod

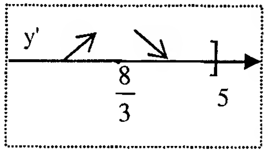
$$y' = \sqrt{5-x} - \frac{x+2}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2(5-x)-(x+2)}{2\sqrt{5-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{5-x}} \quad ;$$

Monotonost

$y' \rangle 0 \quad x \in \left(-\infty, \frac{8}{3}\right)$

$y' \langle 0 \quad x \in \left(\frac{8}{3}, 5\right)$

$y' = 0 \quad x = \frac{8}{3}$



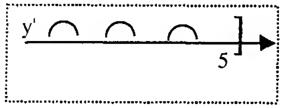
Ima ekstremnu vrednost, maksimum za $x_{max} = \frac{8}{3}$.

Drugi izvod $\quad y'' = \dfrac{-22+3x}{4(5-x)\sqrt{5-x}}$

Intervali konveksnosti i konkavnosti

$y'' \langle 0$ *konkavna* $\cap$ u celoj oblasti definisanosti

$y'' = 0 \quad ; \quad x = \frac{22}{3} \quad ;$

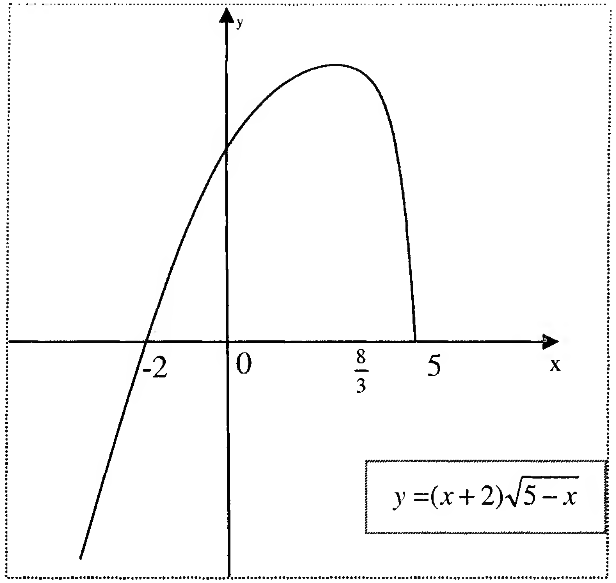


Za $x = \frac{22}{3}$ funkcija nema prevojnu tačku jer tu nije definisana.

tačke preseka sa x-osom ; $N_1(-2,0) \quad N_2(5,0)$

tačka preseka sa y-osom koja se dobija za $x=0$; $C(0, 2\sqrt{5})$

$x_{max} = \frac{8}{3}; \quad f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}+2\right)\sqrt{5-\frac{8}{3}} \approx 7{,}1 \quad A\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$



18° $\quad y = (x+2)^2 e^x$

Oblast definisanosti je R.

Funkcija $f(x)$ **nije periodična, nije parna, nije neparna.**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} (-t+2)^2 e^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{(-t+2)^2}{e^t} = 0$

$f(x)$ ima **horizontalnu asimptotu** $y=0$, samo **sa leve strane**.

Nema vertikalnu ni kosu asimptotu.

Nule

$y = 0 \quad ; \quad (x+2)^2 e^x = 0 \quad ; x = -2$

Funkcija ima jednu nulu i tu grafik seče x-osu.

Znak funkcije se dobija rešavanjem nejednačina :

$(x+2)^2 e^x \rangle 0$ i $(x+2)^2 e^x \langle 0$

$(x+2)^2 e^x \geq 0$ u celoj oblasti definisanosti.

znak + $\quad y \rangle 0 \quad x \in (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$

znak - $\quad y \langle 0 \quad$ nikada

Prvi izvod $\quad y' = 2(x+2)e^x + (x+2)^2 e^x = (x+2)(x+4)e^x$

Monotonost

Nule i znak prvog izvoda su isti kao kod funkcije
$y = (x+2)(x+4)$

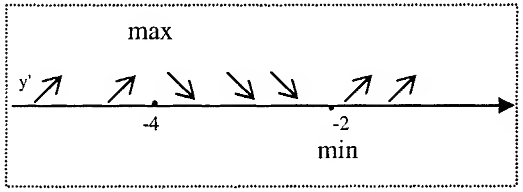
$y' \rangle 0 \quad x \in (-\infty,-4) \cup (-2,\infty)$

$y' \langle 0 \quad x \in (-4,-2)$

$y' = 0 \quad x_1 = -4 \vee x_2 = -4$ potencijalne ekstremne vrednosti

$y' \rangle 0$ rastuća na intervalima $(-\infty,-4)\ i\ (-2,+\infty)$

$y' \langle 0$ opadajuća na intervalu $(-4,-2)$



Ima ekstremne vrednosti, maksimum i minimum za

$x_{\max} = -4 \quad x_{\min} = -2$.

Drugi izvod $\quad y'' = \left[(x^2+6x+8)e^x\right]' = (x^2+8x+14)e^x$

Nule i znak drugog izvoda su isti kao kod funkcije

$y = x^2 + 8x + 14$.

Intervali konveksnosti i konkavnosti

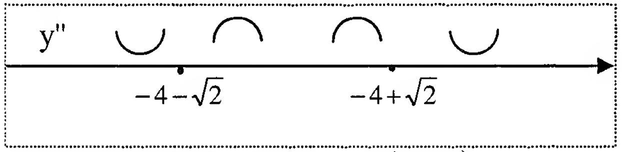
$y'' \rangle 0$ *konveksna* $\cup$; *na* $(-\infty,-4-\sqrt{2})\ i\ (-4+\sqrt{2},+\infty)$

$y'' \langle 0$ *konkavna* $\cap$; *na* $(-4-\sqrt{2},-4+\sqrt{2})$

$y'' = 0$; $x_1 = -4-\sqrt{2} \vee x_2 = -4+\sqrt{2}$

Funkcija ima dve prevojne tačke za

$x_{1prev} = -4-\sqrt{2}$; $x_{2prev} = -4+\sqrt{2}$.



tačka preseka sa x-osom ; $N(-2,0)$

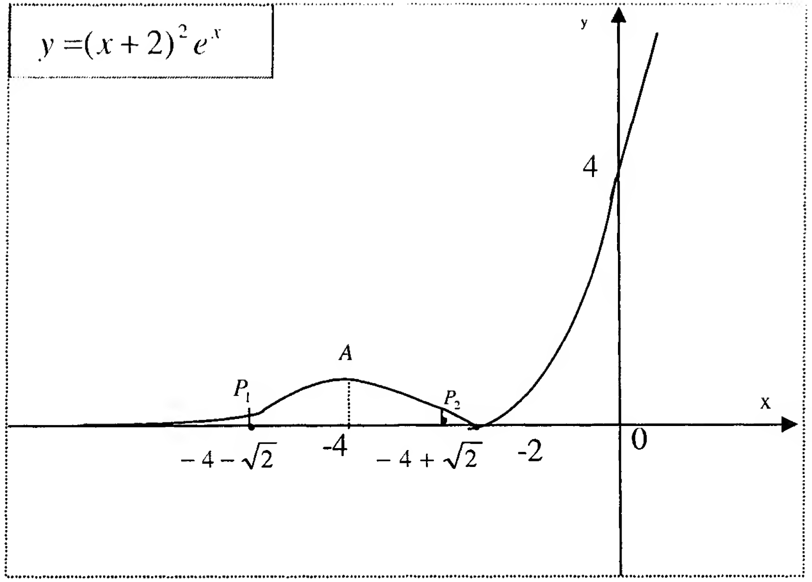
tačka preseka sa y-osom koja se dobija za $x=0$; $C(0,4)$

$x_{\max} = -4;\ f(-4) = (-4+2)^2 e^{-4}$; $A\left(-4,\frac{4}{e^4}\right)$

$x_{\min} = -2;\ f(-2) = (-2+2)^2 e^{-2}$; $B(-2,0)$

$x_{1prev} = -4-\sqrt{2}$; $P_1\left(-4-\sqrt{2}, f(-4-\sqrt{2})\right)$

$x_{2prev} = -4+\sqrt{2}$; $P_2\left(-4+\sqrt{2}, f(-4+\sqrt{2})\right)$



20° $\quad y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

$D = \{x \mid x \neq 0\} = \{x \mid x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$;

$f(x)$ ima **horizontalnu asimptotu** $y = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0-\varepsilon} f(x) = \lim_{x\to 0-\varepsilon} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{0-\varepsilon}}} = 1 \quad ;\varepsilon \rangle 0$$

$$\lim_{x\to 0+\varepsilon} f(x) = \lim_{x\to 0+\varepsilon} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{0+\varepsilon}}} = 0 \quad ;\varepsilon \rangle 0$$

Funkcija nema vertikalnu ni kosu asimptotu.

$f(x) \rangle 0$ u celoj oblasti definisanosti, pa je grafik uvek iznad x- ose.

$f(x)$ nema nule.

Prvi izvod $y' = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

Monotonost

$y' > 0$ funkcija raste uvek u D pa nema ekstremnih vrednosti.

Drugi izvod $y'' = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^4\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^3}$

Intervali konveksnosti i konkavnosti

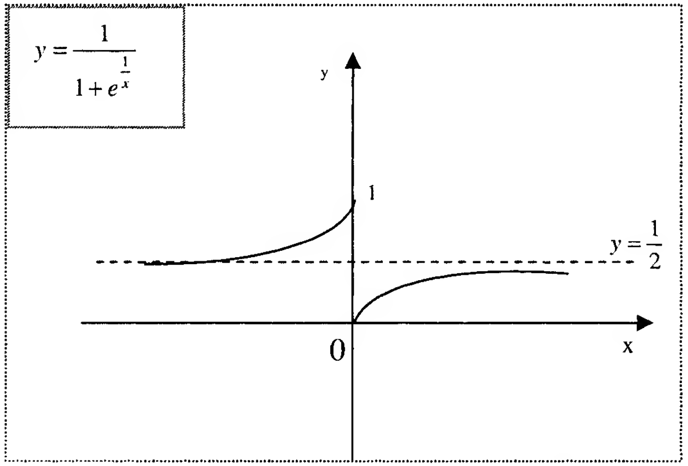
$y'' > 0$ *konveksna* $\bigcup$; $1-e^{\frac{1}{x}} > 0$; $x \in (-\infty, 0)$

$y'' < 0$ *konkavna* $\bigcap$; $1-e^{\frac{1}{x}} < 0$; $x \in (0, +\infty)$

$y'' = 0$ **;** ni za jedno x

Za $x = 0$ y'' menja znak $(-\ pa\ +)$, tj. tada prelazi iz konkavnosti u konveksnost

To nije prevojna tačka jer x = 0 nije u oblasti definisanosti funkcije.



21° $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$D = \{x \mid x > 0\} = \{x \mid x \in (0, +\infty)\}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0\ ;$$

Funkcija **ima horizontalnu asimptotu** y=0.

$$\lim_{x\to 0+\varepsilon} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty\ ;$$

Funkcija **ima vertikalnu asimptotu** x = 0.

Nule

$y = 0$; $x = 1$

Funkcija ima jednu nulu i tu grafik seče x-osu.

Znak:

znak **+** $y > 0$ $x \in (1, \infty)$

znak **-** $y < 0$ $x \in (0, 1)$

Prvi izvod $y' = \dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{x^3}}$

Monotonost

Nule i znak prvog izvoda su isti kao kod funkcije u brojiocu

$y = 2 - \ln x$

$y' > 0$; $2-\ln x > 0$; $x \in (0, e^2)$------- raste na intervalu $(0, e^2)$

$y' < 0$; $2-\ln x < 0$; $x \in (e^2, +\infty)$------ opada na intervalu $(e^2, +\infty)$

$y' = 0$; $2-\ln x = 0$; $x_{max} = e^2$

Drugi izvod $y'' = \dfrac{\frac{3}{2}\ln x - 4}{2\sqrt{x^5}}$

$y'' > 0$ *konveksna* $\bigcup$; *na* $\left(\sqrt[3]{e^8}, +\infty\right)$

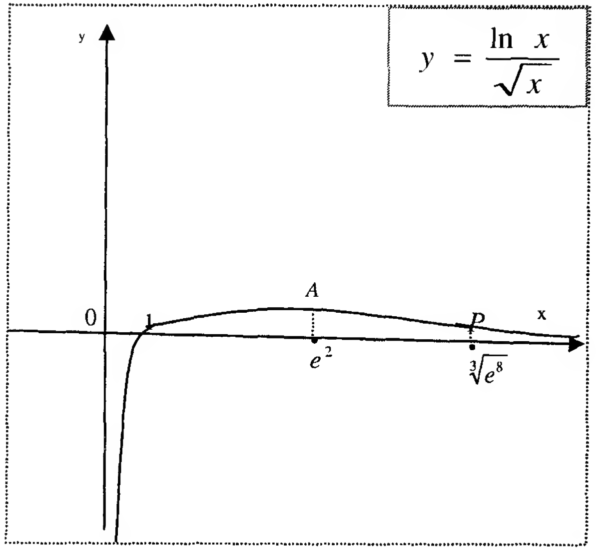
$y'' < 0$ *konkavna* $\bigcap$; *na* $\left(0, \sqrt[3]{e^8}\right)$

$y'' = 0$ **;** $x_{prev} = \sqrt[3]{e^8}$

tačka preseka sa x-osom ; $N(1,0)$

$x_{max} = e^2$; $f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$; $A\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$

$x_{prev} = \sqrt[3]{e^8}$; $P\left(\sqrt[3]{e^8}, f\left(\sqrt[3]{e^8}\right)\right)$



24° $y = |\ln(x-3)|$

$D = \{x | x-3 > 0\} = \{x | x \in (3,+\infty)\}$

Funkcija može da se predstaviti pomoću dve funkcije:

$$y = \begin{cases} \ln(x-3)\,;\ \ln(x-3) \geq 0 \\ -\ln(x-3)\,;\ \ln(x-3) < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -\ln(x-3)\,;\ x \in (3,4] \\ \ln(x-3)\,;\ x \in (4,+\infty) \end{cases}$$

Ima **vertikalnu asimptotu** čija je jednačina $x = 3$.

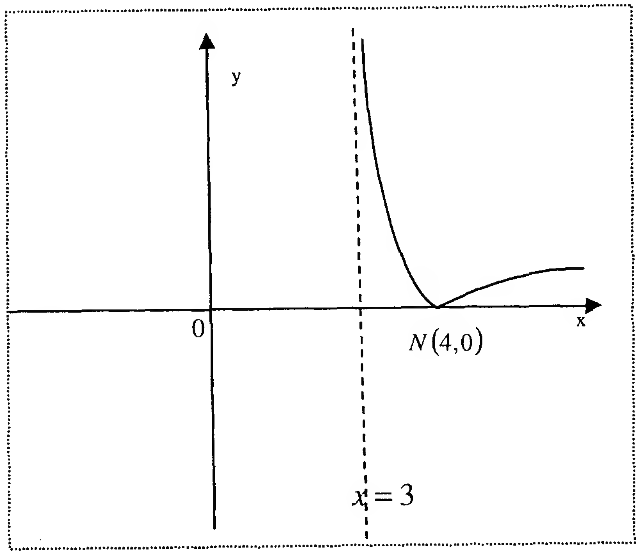
Ima jednu nulu za $x = 4$.

Funkcija je nenegativna u D.

$$y' = \begin{cases} -\frac{1}{x-3}\,;\ x \in (3,4] \\ \frac{1}{x-3}\,;\ x \in (4,+\infty) \end{cases}$$

Ima minimum za $x_{min} = 4$;

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2}\,;\ x \in (3,4] \\ -\frac{1}{(x-3)^2}\,;\ x \in (4,+\infty) \end{cases}$$; Ima prevojnu tačku za $x_{prev} = 4$



XII ISPITNI ZADACI

Varijanta 1

PISMENI ZADATAK iz MATEMATIKE 1

1. Sastaviti istinitosnu tablicu za formulu:
$(\neg p \Rightarrow q)\underline{\vee}(p \wedge q)$

2. Dat je skup A= { -3,-2,-1,0, 1, 2, 3 } i relacija ρ .
$$x \rho y \Leftrightarrow |x|=|y|$$
Nacrtati graf i utvrditi osobine relacije.

3. Rešiti jednačinu u skupu kompleksnih brojeva:
$$z^3+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$$

4. Rešiti sistem matričnom metodom
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ y + z &= 2 \\ x - z &= -1 \end{aligned}$$

5. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku A (-1, 2, 0) i paralelna je sa dve date prave
$$(p)\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{2} \quad \text{i} \quad (q)\ \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{3}$$

6. Odrediti sledeće granične vrednosti:
$$1^\circ\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}}{\sqrt{2x^2-5x+1}}= \qquad 2^\circ\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x-5)(x-1)}-x)=$$
$$3^\circ\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+2}\right)^x= \qquad 4^\circ\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=$$

7. Odrediti prve izvode sledećih funkcija:
$$1^\circ\ y=\frac{\ln x}{x^5}+e^x\cos x \qquad 2^\circ\ y=\ln(\sin x+\sqrt{4x-2}) \qquad 3^\circ\ y=(x)^{\sin x}$$

8. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y=\dfrac{2x^2+x+4}{x-3}$

Varijanta 2

PISMENI ZADATAK iz MATEMATIKE 1

1.Sastaviti istinitosnu tablicu za formulu
$(\neg p \vee q)\underline{\vee}(p \Rightarrow q)$

2. Dat je skup A= {-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3 } i relacija ρ .
$$x \rho y \Leftrightarrow x \le y$$
Nacrtati graf i utvrditi osobine relacije.

3. Rešiti jednačinu u skupu kompleksnih brojeva :
$$z^3-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$$

4. Rešiti sistem matričnom metodom
$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

5. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku A (1, 4, 0) i paralelna je sa dve date prave
$$(p)\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3} \quad \text{i} \quad (q)\ \frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$$

6. Odrediti sledeće granične vrednosti
$$1^\circ\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}}{\sqrt{5x^2-2x+3}}= \qquad 2^\circ\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x-3)(x+4)}-x)=$$
$$3^\circ\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+4}\right)^x= \qquad 4^\circ\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=$$

7.Odrediti prve izvode sledećih funkcija :
$$1^\circ\ y=\frac{\sin x}{x^7}+\ln x\cos x \qquad 2^\circ\ y=\ln(arctgx+\sqrt{4x-2}) \qquad 3^\circ\ y=(x)^{\cos x}$$

8. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y=x^2e^{-x}$

Varijanta 3

PISMENI ZADATAK iz MATEMATIKE 1

1.Sastaviti istinitosnu tablicu za formulu
$(\neg p \Rightarrow q)\underline{\vee}(p \wedge q)$

2. Dat je skup A= {-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3 } i relacija ρ .

$$x \rho y \Leftrightarrow |x| \geq |y|$$

Nacrtati graf i utvrditi osobine relacije.

3. Rešiti jednačinu u skupu kompleksnih brojeva :

$$z^4 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 0$$

4. Rešiti sistem matričnom metodom

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ y + z &= 2 \\ x \quad - z &= -1 \end{aligned}$$

5. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku A (-1, 0, 3) i pravu (p)

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

6. Odrediti sledeće granične vrednosti:

1° $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3 + x^2 + 1}}{\sqrt{3x^2 - 2x + 2}} =$ 2° $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{(x-2)(x+5)} - x) =$

3° $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2x-3}{2x+5})^x =$ 4° $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} =$

7.Odrediti prve izvode sledećih funkcija :

1° $y = \frac{\ln x}{x^7} + \sin x e^x$ 2° $y = \ln(\sin x + \sqrt{3x-2})$ 3° $y = (\sin x)^x$

8. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Varijanta 4

PISMENI ZADATAK iz MATEMATIKE 1

1.Sastaviti istinitosnu tablicu za formulu
$(\neg p \vee q)\underline{\vee}(p \Rightarrow q)$

2. Dat je skup A= {,-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3 } i relacija ρ .

$$x \rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

Nacrtati graf i utvrditi osobine relacije.

3. Rešiti jednačinu u skupu kompleksnih brojeva :

$$z^6 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 0$$

4. Rešiti sistem matričnom metodom

$$\begin{aligned} x \quad + z &= 1 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

5. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku A (-1, 0, 3) i pravu (p)

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

6. Odrediti sledeće granične vrednosti:

1° $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 5}}{\sqrt{5x^2 - 2x + 3}} =$ 2° $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{(x+3)(x-5)} - x) =$

3° $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2x-1}{2x+3})^x =$ 4° $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} =$

7.Odrediti prve izvode sledećih funkcija:

1° $y = \frac{\ln x}{x^7} + \sqrt[3]{x} \sin x$ 2° $y = \ln(e^x + \sqrt{3x+5})$ 3° $y = (\cos x)^x$

8. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{2 - x}$

Varijanta 5

PISMENI ZADATAK iz MATEMATIKE 1

1.Sastaviti istinitosnu tablicu za formulu
$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

2. Dat je skup A= { 1, 2, 3,4,5 } i relacija ρ .
$x \rho y \Leftrightarrow x+1 \leq y$
Nacrtati graf i utvrditi osobine relacije.

3. Rešiti jednačinu u skupu kompleksnih brojeva :
$$z^3 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 0$$

4. Rešiti sistem matričnom metodom
$$\begin{aligned} x \quad\quad + z &= 2 \\ -x + y + z &= 2 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

5. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku A (-1, 0, 2) i pravu (p)
$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

6. Odrediti sledeće granične vrednosti:

1° $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{3x^4+2x^2+1}}{\sqrt{5x^2-2x+2}} =$ 2° $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+4)(x-1)}-x) =$

3° $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-1}{3x+5})^x =$ 4° $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} =$

7.Odrediti prve izvode sledećih funkcija:

1° $y = \frac{\ln x}{x^5} + \sqrt[3]{x} \cdot \arcsin x$ 2° $y = \ln(x^4 + \sqrt{5x+1})$

3° $y = (\sin x)^x$

8. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y = \frac{x^2-x-2}{x-3}$

Varijanta 6

PISMENI ZADATAK iz MATEMATIKE 1

1. Sastaviti istinitosnu tablicu za formulu
$(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

2. Dat je skup A= { 1, 2, 3, 4 } i relacija ρ .
$x \rho y \Leftrightarrow x \geq y+1$
Nacrtati graf i napraviti tablicu relacije.

3. Rešiti jednačinu u skupu kompleksnih brojeva:
$$z^3 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 0$$

4. Rešiti matričnu jednačinu :

A X = B + E ako je : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

E je odgovarajuća jedinična matrica.

5. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačku A (1, 2, 0) i paralelna je sa dve date prave

(p) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ i (q) $\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$

6. Odrediti sledeće granične vrednosti :

1° $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}}{\sqrt{4x^2-x+3}} =$ 2° $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+5)(x-1)}-x) =$

3° $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-5}{3x+2})^x =$ 4° $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} =$

7. Odrediti prve izvode sledećih funkcija :

1° $y = \frac{\sin x}{x^5} + \ln x \cdot tgx$ 2° $y = \ln(\cos x + \sqrt{5x-2})$

3° $y = (x)^{\cos x}$

8. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y = \frac{x^2-1}{x-3}$

LITERATURA:

S.Ognjanović,Ž.Ivanović : Matematika 3 , Beograd "Krug" 1999

S.Ognjanović,Ž.Ivanović : Matematika 4 , Beograd "Krug" 1999

А.Д.Кусатов :Пособие по математике , Москва "Наука" 1985

Ф.П. Яремчук П.А. Рудченко :Алгебра и элементарные функции,
Киев НАУКОВА ДУМКА 1987

П.С.Моденов: Аналитическая геометрия , Издательство Московского
университета 1969

Г.Н.Берман : Сборник задач по курсу метематического анализа,
Москва "Наука" 1969

Д.К. Фадеев, И.С. Соминский: Сборник задач по высшей алгебре,
Москва "Наука" 1977